
EL PROBLEMA DE LA TRANSPARENCIA DIDÁCTICA DEL PARÁMETRO EN LOS TEXTOS DE ESTADÍSTICA

SOLANGE ARANZUBÍA VERA, BLANCA ROSA RUIZ HERNÁNDEZ, LAUTARO VÁSQUEZ ORTIZ, JOSÉ ARMANDO ALBERT HUERTA Y ÁLVARO CORTÍNEZ PONTONI

RESUMEN

El parámetro, cuya estimación y validación es central en la inferencia estadística, aparenta simplicidad en el discurso escolar, pero oculta una complejidad no atendida. Esta investigación busca dar evidencia de este problema desde la perspectiva didáctica de los libros de texto con relación a la articulación de los diferentes significados que se le da al pa-

rámetro a lo largo de los contenidos de un curso introductorio de probabilidad y estadística universitario. Los resultados muestran algunas inconsistencias e incluso la omisión de una conceptualización clara del parámetro en el discurso de los libros de texto, así como que su simplicidad es solo hecho aparente.

El estudio de los contenidos estadísticos se ha ido incrementando en los últimos años. Prácticamente todas las carreras universitarias tienen al menos una asignatura de estadística o relacionada con ella. Incluso en carreras que aparentemente puedan resultar muy distantes, como Derecho, tal y como lo señalan al afirmar Corona y Martínez (2011:4): "la estadística posibilita la reducción y lectura de la realidad al generar instrumentos que aceleren el entendimiento de la eficacia de la ley ante la sociedad" (pág. 4).

Actualmente la estadística está presente desde el nivel de enseñanza primaria y secundaria. En Chile, por ejemplo, en los últimos años el Ministerio de Educación ha incrementado los contenidos de estadística en la enseñanza básica y media. Con esto se pretende responder en gran medida a la demanda del medio, en que cada vez se están utilizando más conceptos estadísticos que requieren la comprensión de las personas.

Fuera de las aulas, la estadística se ha ido introduciendo en la cultura general de la sociedad. Es común ver las interpretaciones de datos, las

inferencias implícitas que las personas realizan de las informaciones en base a extrapolaciones que en muchos casos pueden resultar muy simplistas, pero que de todas formas llevan intrínsecamente un razonamiento estadístico asociado.

En los cursos regulares de estadística para carreras universitarias, la inferencia estadística es la culminación de una secuencia de conocimientos que parte desde la estadística descriptiva. La simple descripción de datos es insuficiente para poder hacer estimaciones o predicciones. Se requieren métodos probabilísticos para poder incorporar y entender la

PALABRAS CLAVE / Educación Superior / Enseñanza de la Estadística / Libros de Texto / Parámetro /

Recibido: 05/10/2020. Modificado: 09/11/2021. Aceptado: 11/11/2021.

Solange Aranzubía Vera. Magíster y Doctor en Ciencia mención Matemática, Universidad de Santiago de Chile. Profesora, Universidad Central de Chile.

Blanca Rosa Ruiz Hernández. Maestría en Educación Matemática, Instituto Politécnico Nacional, México. Doctora en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Profesora, Instituto Tecnológico de Monterrey, México.

Lautaro Vásquez Ortiz. Maestría en Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil. Profesor, Universidad de Tarapacá, Chile.

José Armando Albert Huerta. Maestría y Doctorado en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México. Profesor, Instituto Tecnológico de Monterrey, México.

Álvaro Cortínez Pontoni (Autor de correspondencia). Doctor en Estadística, Universidad Complutense de Madrid, España. Profesor, Universidad de Tarapacá, Chile. Dirección: Departamento de Matemática, Universidad de Tarapacá. Av. 18 de Septiembre N° 2222, Casilla 7-D, Arica, Chile. E-mail: acortinezp@academicos.uta.cl

incertidumbre inherente a todo experimento u acción. Juntas, la estadística descriptiva y la probabilidad, permiten realizar inferencias sobre los parámetros y las poblaciones.

La estadística inferencial está centrada en gran parte en el parámetro. En el contexto de las variables aleatorias, los parámetros permiten identificar y generalizar los modelos de probabilidad. En la inferencia estadística se avanza un paso más, al realizarse preguntas sobre los parámetros. En primer lugar, se analizan los valores que los parámetros podrían tomar en la población, en base a los datos recogidos de las muestras. Se definen sus estimadores y se buscan las mejores estimaciones posibles en función de los datos disponibles. A continuación, y basándose en las distribuciones en el muestreo, se realizan las estimaciones por intervalos. De esta forma, se da un rango de valores que podría tomar el parámetro desconocido, con una cierta certeza. Otra de las funciones de la inferencia estadística radica en realizar preguntas acerca de los parámetros e incluso comparaciones entre posibles parámetros. Por lo tanto, el estudio de la inferencia estadística tiene como eje central a los parámetros. De ahí la importancia de que sea abordado por la comunidad científica de educación estadística. Este trabajo busca dar los primeros pasos en esa dirección.

La problemática que trata esta investigación es el hecho que el parámetro estadístico no sea tratado desde su perspectiva propia que tiene en la estadística en general y en la didáctica de la estadística. En particular, se busca dar evidencia del problema desde un ángulo de la enseñanza: los libros de texto. Se utilizará la expresión ‘transparencia del parámetro’ en el sentido de Chevallard (1992): hay objetos matemáticos que parecen existir *per se*, lo cual se debe a la naturaleza de las prácticas asociadas, las cuales los convierten en transparentes. Se muestra la secuencia de significados que toma el parámetro en el discurso del desarrollo temático de libros de texto de estadística para estudiantes universitarios. De esta forma se pretende poner en evidencia la transparencia didáctica que tiene el significado del parámetro en los libros de texto.

Estado actual de la investigación educativa con relación al parámetro

El parámetro como tal no ha sido objeto de estudio en la didáctica de la estadística más que muy tangencialmente. Tal es el caso de Vallecillos (1999) cuando menciona que los estudiantes suelen confundir el parámetro μ con el

estadístico \bar{x} al plantear las pruebas de hipótesis. Sin embargo, desde la matemática determinística hay más estudios. Uno de ellos, de Ursini y Trigueros (2004), donde se muestra que los parámetros son números generales que llaman ‘de segundo orden’, es decir, que generalizan expresiones que solo consideran números. Aparecen cuando representan familias de expresiones de primer orden, es decir, familias de ecuaciones, familias de funciones o familias de expresiones abiertas. El parámetro asume el rol de ‘desconocido’, lo que lleva a reconocer que dicho parámetro representa algo que puede ser determinado. Debe ser posible interpretarlo considerando que representa valores específicos que se pueden determinar considerando las restricciones dadas en los problemas específicos.

En Espinel *et al.* (2007) se mencionan dificultades por parte de los estudiantes para discernir entre parámetro, estimador y estimación. Ellos muestran “el problema de discernir entre el parámetro que se estima (constante desconocida) y el estimador que se usa para ello (variable aleatoria función de la muestra), e incluso de la estimación obtenida con los datos muestrales (valor específico)” (Espinel *et al.*, 2007: 18), lo cual posiblemente se deba a la confusión entre población y muestra.

Ely y Adams (2012) tratan al parámetro simplemente como un coeficiente específico que tomará un número particular. Ellos toman además, como referencia, el estudio de Bardini *et al.* (2005) sobre el pensamiento algebraico de los estudiantes acerca de la variable. Lo ligan con la comprensión del concepto de parámetro, un elemento indeterminado pero fijo de ‘los valores tomados’ por una variable. La paradójica naturaleza epistémica de este objeto algebraico se basa en su aparente contradicción: es un número en particular, fijo, pero que se mantiene indeterminado y que no es un número actual. Esto se visualiza en un estudio cognitivo realizado por Cortínez *et al.* (2015), donde se observa que la imprecisión del concepto genera un vacío en el conocimiento por parte de los estudiantes. De esta forma, en estadística se asume el parámetro ‘matemático’, especialmente en las distribuciones de probabilidad. No se realizan especiales cuestionamientos acerca de su naturaleza epistemológica. Más bien es tratado como un valor desconocido y generalizador.

Marco de Referencia

La naturaleza de un problema didáctico suele ser compleja y en él intervienen de manera sistémica

diversas dimensiones como las epistemológica, cognitiva, cultural y de enseñanza. De esta forma, no atiende exclusivamente al aprendizaje de los conceptos y procesos matemáticos, sino que incorpora a la investigación dimensiones sociales, históricas, culturales e institucionales, que permiten efectivamente la construcción del conocimiento matemático (Soto y Cantoral, 2014). Esta investigación aborda solo un aspecto de la dimensión de enseñanza: los libros de texto con relación a los significados que le dan al concepto de parámetro a lo largo del discurso de sus contenidos. Se espera que los resultados aporten conocimiento sobre el estado del problema didáctico relativo al parámetro.

El objetivo del trabajo es analizar el tratamiento que le dan al concepto de parámetro en diferentes manuales universitarios de estadística.

Metodología

Se realizó un análisis de textos, con relación al concepto de parámetro, de los libros de texto más frecuentes de estadística elemental de tres universidades de Chile, México y España: Universidad de Tarapacá (UTA), Tecnológico de Monterrey (ITESM) y Universidad Carlos III de Madrid (UC3M). Se escogieron estas universidades de manera intencionada, porque los autores han tenido vinculación con ellas a lo largo de sus carreras. Esta intención al escoger las instituciones no debería influir en el resultado del estudio, pues se está trabajando con textos y manuales de estadística que son transversales a las instituciones. Además, se incluyen dos libros de textos considerados ‘clásicos’ que, si bien no son muy utilizados como libros de texto en los cursos hoy en día, sí lo fueron durante varias generaciones pasadas y aún siguen siendo relevantes como libros de consulta. En esta revisión se analiza, en cada texto, su estructura general, definición de parámetro y significado de este concepto en tres grandes momentos discursivos que aluden al concepto de parámetro: estadística descriptiva, distribuciones de probabilidad e inferencia estadística. Se concluye con una descripción de la secuencia de significados presentados a lo largo del desarrollo del contenido temático del libro.

Para realizar el estudio se escogieron asignaturas equivalentes o similares en cuanto a contenidos en las tres instituciones, en las áreas de Ingeniería y de Administración de Empresas. Específicamente, se trata de las primeras asignaturas de estadística que los estudiantes tienen en las carreras seleccionadas. Todas ellas se basan en que los

estudiantes han cursado previamente alguna asignatura de matemática, teniendo ya cierta base en álgebra y cálculo. En todas estas asignaturas se revisó el programa y se extrajeron los libros de texto propuestos en ellos. Se obtuvo la siguiente información:

Texto 1: Montgomery y Runger (2012) Estadística Aplicada y Probabilidad para Ingenieros. Asignaturas en que se utiliza: Probabilidad y Estadística para Ingeniería (ITESM, UTA).

Texto 2: Anderson, Sweeney y Williams (2012) Estadística para Administración y Economía. Asignaturas en que se utiliza: Estadística y Probabilidad para Ingeniería Comercial (UTA), Estadística para ingenierías (ITESM).

Texto 3: Newbold, Carlson y Thorne (2013) Estadística para Administración y Economía. Asignaturas en que se utiliza: Estadística para Administración de Empresas (UC3M), Estadística para Ingeniería Comercial (UTA).

Texto 4: Walpole, Myers y Myers (2012) Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Asignaturas en que se utiliza: Estadística para Ingenierías (UC3M, UTA).

Texto 5: Devore (2012) Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. Asignaturas en que se utiliza: Probabilidad y Estadística para Ingeniería (ITESM), Estadística y Probabilidad para Ingeniería Comercial (UTA).

Además, se escogieron dos libros de textos considerados clásicos, en el sentido que han sido utilizados por varias generaciones de estadísticos y profesores de estadística, por lo que son considerados textos valiosos que perduran a través del tiempo:

Texto Clásico 1: Meyer (1992) Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.

Texto Clásico 2: Mood y Graybill (1963) Introduction to the theory of statistics.

Debe quedar claro que el estudio no es comparativo de las asignaturas entre las universidades. Se trata de analizar el concepto de parámetro en los libros de textos que esas asignaturas utilizan.

Resultados

A continuación se muestra, para cada uno de los siete textos seleccionados, la estructura del mismo, así como el tratamiento que le da al concepto de parámetro.

Texto 1 (Montgomery y Runger, 2012)

Estructura del texto: La estructura del libro consiste en un primer

capítulo de introducción y estadística descriptiva, luego uno de probabilidad seguido de variables aleatorias, uni y bidimensionales, distribuciones de probabilidad y los capítulos de inferencia. Finalmente, hay capítulos de regresión, diseño de experimentos, estadística no paramétrica y control estadístico de la calidad.

El parámetro en la estadística descriptiva: En el capítulo de estadística descriptiva, dos de las secciones están dedicadas a medidas descriptivas. Hasta entonces no se hace alusión al parámetro. Sin embargo, en la primera de ellas se definen la media muestral y media poblacional. Más aún, a la media poblacional, que se considera como el promedio de todas las observaciones de la población, se le denota con la letra griega μ . Si existe un número finito de observaciones, digamos N , la media poblacional es

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Para poblaciones infinitas se anuncia que en los próximos capítulos se proporcionará una definición más general de μ . Para la mediana poblacional se utiliza la notación $\hat{\mu}$. De manera similar a lo que ocurre con la media, se hace una distinción entre la varianza muestral (s^2) y la poblacional (σ^2).

Cabe señalar que se está introduciendo desde ya, aunque de forma muy simple, la idea de estimación: "La media muestral puede emplearse para hacer inferencias sobre la media poblacional. De manera similar, la varianza muestral puede utilizarse para hacer inferencias sobre la varianza poblacional" (Montgomery y Runger, 2012: 17).

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: En el capítulo de variables aleatorias surge nuevamente el concepto de media (esperanza) y varianza, utilizándose la notación μ_x y σ_x^2 , respectivamente. Se justifica realizando una analogía entre probabilidad y proporción de un número grande de repeticiones del experimento.

Los modelos de probabilidad son introducidos utilizando ya directamente el término 'parámetro'. No se da una definición específica, aunque se da a entender, a través de la secuencia de los temas tratados, que tienen relación con la idea de media y varianza poblacional, aunque en los ejercicios propuestos se observa que parámetros y medidas características no son lo mismo.

El parámetro en la inferencia estadística: En el capítulo de estimación de parámetros, se utiliza el concepto directamente, sin profundizar en su

significado. La inferencia estadística está enfocada en obtener conclusiones acerca de uno o más parámetros de una población. Una parte importante de este proceso es la obtención de estimadores de los parámetros. A continuación, se habla de parámetro o de parámetro poblacional de forma indistinta. Se afirma que una aplicación de la estadística es obtener estimadores puntuales de parámetros tales como la media y la varianza de la población y se propone utilizar las letras griegas para representar dichos parámetros. Un ejemplo inmediato es el de la variable aleatoria con distribución normal de media 'no conocida' μ , afirmándose que "la media muestral es un estimador puntual de la media no conocida de la población".

Resumen: En estadística descriptiva no se menciona el parámetro, pero se alude a él al referirse a las medidas descriptivas calculadas a partir de la población y asignándole letras griegas como notación. Lo mismo ocurre para variables aleatorias y aunque aquí sí se menciona el parámetro, no es definido. En inferencia se utiliza la notación anteriormente introducida, sin dar una definición formal de parámetro.

Texto 2 (Anderson, Sweeney y Williams, 2012)

Estructura del texto: Este texto consta de tres capítulos de estadística descriptiva, uno de probabilidad y dos de variables aleatorias. A continuación tiene un capítulo de muestreo y distribuciones muestrales, y cinco capítulos de inferencia estadística (el último de pruebas de bondad de ajuste e independencia). Luego siguen capítulos de análisis de la varianza, regresión, números índices, series de tiempos y métodos no paramétricos.

El parámetro en la estadística descriptiva: En el capítulo 3 se presentan las medidas numéricas de la estadística descriptiva. Ya en la introducción se menciona el parámetro, haciéndose la distinción de si las medidas numéricas se calculan con los datos de la muestra ('estadísticos muestrales') o de la población ('parámetros poblacionales'). Además, se menciona que, en inferencia estadística, al estadístico muestral se le conocerá como estimador puntual del correspondiente parámetro poblacional. El mismo capítulo termina con un glosario en que define: "Parámetro poblacional: Valor numérico que resume una población (por ejemplo, la media poblacional μ , la varianza poblacional, σ^2 y la desviación estándar poblacional, σ)" (Anderson *et al.*, 2012: 125).

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: El concepto de parámetro surge nuevamente al tratar

el modelo normal, para definir la media y la varianza.

El parámetro en la inferencia estadística: En el capítulo de muestreo y distribuciones muestrales se vuelven a definir los parámetros como "las características numéricas de una población" (Anderson *et al.*, 2012: 258), estipulándose como principal propósito de la inferencia estadística la realización de estimaciones y pruebas de hipótesis acerca de los parámetros poblacionales usando la información que proporciona la muestra. Llama la atención que en este texto siempre se habla de 'parámetros poblacionales' en vez de 'parámetros' simplemente.

Resumen: El parámetro surge desde los capítulos de estadística descriptiva como una medida obtenida a partir de la población y dando una definición formal como medida de resumen de la población. En modelos de probabilidad, el parámetro sigue siendo una medida de resumen. Finalmente, en la inferencia estadística, el parámetro es definido de forma general como característica numérica de la población.

Texto 3 (Newbold, Carlson y Thorne, 2013)

Estructura del texto: Este libro de texto tiene una estructura similar a los anteriores: estadística descriptiva, probabilidad y variables aleatorias, inferencia y, luego, capítulos que puedan tener aplicaciones más específicas al área, tales como regresión, análisis de la varianza y series de tiempo, entre otros.

El parámetro en la estadística descriptiva: Ya en la sección de muestreo se definen el parámetro y el estadístico: "Un parámetro es una característica específica de una población. Un estadístico es una característica específica de una muestra" (Newbold *et al.*, 2013: 4). En el párrafo anterior hace una relación del cálculo de la media de una muestra y de la población, llamándola en el primer caso estadístico y en el segundo parámetro. Y finaliza dicho párrafo con: "En este libro veremos cómo se toman decisiones sobre un parámetro, basándose en un estadístico. Debemos darnos cuenta de que siempre habrá una cierta incertidumbre, ya que no se conoce el valor exacto del parámetro". Es decir, realiza una proyección hacia la inferencia estadística. Además, el hecho de hablar de incertidumbre del parámetro, da pie a que es necesario estudiarlo más a fondo.

Cabe señalar que hay una sección de ejercicios relacionados con el parámetro donde hay preguntas que podrían ayudar a clarificar el concepto de

parámetro. Por ejemplo, ¿Es 1,5 por ciento un parámetro o un estadístico?

Por otra parte, es interesante destacar que desde la estadística descriptiva se está introduciendo la notación que habitualmente se utiliza para parámetro, distinguiéndola de la de estadístico:

$$\text{Media poblacional: } \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\text{Media muestral: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

siendo N y n los tamaños poblacionales y muestrales, respectivamente.

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: No se vuelve a hablar de parámetro en el capítulo de probabilidad ni de variables aleatorias y surge recién nuevamente al introducir el modelo de Poisson. Obsérvese que antes de este modelo, en el libro se habían presentado el Bernoulli, binomial e hipergeométrico donde si bien había parámetros, estos no fueron mencionados como tales. En el modelo normal se relaciona el parámetro con las medidas descriptivas, de modo que μ y σ^2 "producen diferentes efectos en la función de densidad de una variable aleatoria normal".

El parámetro en la inferencia estadística: Al tratarse el capítulo muestreo y distribuciones en el muestreo la 'proporción muestral', se menciona nuevamente el modelo binomial, pero tratándose como parámetro solo "la proporción de miembros de la población que tienen una característica de interés", dejándose a n como un valor fijo, pero no identificándolo como parámetro. En el mismo capítulo se introduce, además, el modelo 'Ji cuadrado', donde su parámetro corresponde a los grados de libertad.

Los capítulos de inferencia estadística aparecen como una continuación de los capítulos anteriores, pues se mantiene el concepto de parámetro como ya había sido tratado, considerándolo un 'valor desconocido' que se ha de estimar.

Resumen: El parámetro es definido desde el comienzo del texto como una característica de la población, ejemplificándose con las medidas características habituales. Desde entonces se introduce la idea de estimación.

Texto 4 (Walpole, Myers y Myers, 2012)

Estructura del texto: La estructura de este libro de texto comienza con un capítulo de introducción y estadística descriptiva. Le sigue un capítulo de introducción a la probabilidad y cinco capítulos de variables aleatorias y modelos

de probabilidad. Después un tema de distribución en el muestreo para seguir con inferencia estadística en dos capítulos. Continúa con regresión lineal simple y múltiple, análisis de la varianza de uno, dos factores y diseños 2^k . Luego hay un capítulo de estadística no paramétrica y otro de control estadístico de la calidad. El texto finaliza con un breve capítulo de estadística bayesiana.

El parámetro en la estadística descriptiva: La primera alusión al parámetro surge en la introducción, al presentar la inferencia estadística, cuyo propósito "es obtener conclusiones acerca de las características o parámetros" (Walpole *et al.* 2012: 12).

En el contexto de las medidas características el parámetro aparece recién después de las medidas de dispersión, haciendo alusión a la inferencia estadística nuevamente, donde se busca obtener conclusiones acerca de las características de la población. "Entre tales características son constantes los denominados parámetros de la población" (Walpole *et al.* 2012: 16). Se mencionan 'dos parámetros importantes': media de la población y varianza de la población.

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: En el capítulo de esperanza matemática, luego de ver las variables aleatorias, se menciona el parámetro como característica de la naturaleza general del sistema (modelo). Los parámetros 'importantes' que se mencionan son la media de una distribución, que 'refleja una tendencia central', la varianza o la desviación estándar, que 'reflejan la variabilidad en el sistema', y la covarianza, que 'refleja la tendencia de dos variables aleatorias a 'moverse juntas' en un sistema'. De esta forma, en el momento de tratar los modelos de probabilidad se hace alusión a sus parámetros de forma directa.

El parámetro en la inferencia estadística: En el capítulo de distribuciones muestrales se introduce la idea de estimación: "Nuestro principal propósito al seleccionar muestras aleatorias consiste en obtener información acerca de los parámetros desconocidos de la población" (Walpole *et al.* 2012: 227). En los siguientes capítulos se habla de la estimación de los parámetros de la perspectiva clásica y bayesiana.

Resumen: El parámetro es introducido junto a los elementos generales del libro. En estadística descriptiva se relaciona con el cálculo de las medidas descriptivas poblacionales. Lo mismo se hace en los modelos de probabilidad. En inferencia, la estimación de parámetros es realizada desde los puntos de vista clásico y bayesiano.

Estructura del texto: El texto comienza con un capítulo de generalidades y estadística descriptiva, seguido de uno de probabilidad. A continuación, se tienen tres capítulos sobre variables aleatorias. La inferencia se ve en varios capítulos, empezando por estimación puntual, y luego en intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para una y dos muestras. Le siguen capítulos de análisis de la varianza, análisis de regresión, pruebas de bondad de ajuste y no paramétricas, terminando con un capítulo de control de calidad.

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: El concepto de parámetro surge recién en el capítulo de distribuciones de probabilidad y se comienza con una definición: "Supóngase que $p(x)$ depende de la cantidad que puede ser asignada a cualesquiera de varios valores posibles y cada valor determina una distribución de probabilidad diferente. Tal cantidad se llama parámetro de distribución" (Devore, 2012: 94).

Se ejemplifica con un caso que hace recordar el parámetro en el contexto matemático:

$$p(x; \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

Obsérvese que dentro de los argumentos de la 'función de masa de probabilidad' se incluye α , lo cual puede dar a entender que dicho parámetro también es aleatorio.

El parámetro en la inferencia estadística: En el capítulo de estimación puntual se hace alusión al parámetro como 'característica de la población'. Se busca así un número (estimador) para que "represente una buena suposición del valor verdadero del parámetro" (Devore, 2012: 227). Durante el resto del libro, se habla del parámetro como un valor desconocido.

Resumen: El parámetro no es considerado en el capítulo de estadística descriptiva. El parámetro es presentado en el contexto de las distribuciones de probabilidad como un elemento generalizador. En inferencia es introducido como una característica de la población.

Texto Clásico 1 (Meyer, 1992)

Estructura del texto: Este es un libro clásico, con el que se formaron en probabilidad muchos profesionales. Su estructura comienza con tres capítulos de probabilidad, pasando luego a nueve temas relacionados con variables aleatorias uni y multidimensionales, incluyendo

aplicaciones a la teoría de confiabilidad. A inferencia estadística se le dedica finalmente tres capítulos: uno de distribuciones en el muestreo, otro de estimación y el último de pruebas de hipótesis. Es, por lo tanto, tal como su título lo indica, un libro dedicado en gran parte a las probabilidades y variables aleatorias.

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: El concepto de parámetro surge en el capítulo 4 al presentar el modelo binomial. Sin embargo, no se define y se mantiene ausente luego hasta el capítulo 7 (Otras Características de las variables aleatorias), donde se esboza una idea de su papel: "Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución (tal como la pendiente de una recta proporciona una información útil acerca de la relación lineal que representa)" (Meyer, 1992: 153). En este mismo capítulo se asocia la idea de parámetro con la de esperanzas, varianzas y de coeficiente de correlación: "Aunque hay una fuerte semejanza entre el promedio ponderado y la definición de $E(X)$, es importante señalar que este último es un número (parámetro) asociado con una distribución de probabilidades teórica, mientras que el primero es simplemente el resultado de combinar un conjunto de números de una manera especial" (Meyer, 1992: 156).

El parámetro en la inferencia estadística: Al comenzar los capítulos de inferencia, se presenta el parámetro directamente como: un número, desconocido, que caracteriza a la distribución de probabilidades. Cabe señalar que se da la posibilidad de que el parámetro sí sea conocido, pero a partir de estudios previos. Después, se centra el texto en realizar inferencias habituales sobre los parámetros.

Resumen: No hay una definición del parámetro. Se empieza relacionándolo con el parámetro matemático para continuar caracterizando a las distribuciones de probabilidad. Es tratado como un número desconocido.

Texto Clásico 2 (Mood y Graybill, 1962)

Estructura del texto: Después de una introducción comienza inmediatamente con teoría de probabilidades, seguido de cuatro capítulos de variables aleatorias. Con un capítulo de muestreo, el resto del libro se dedica a inferencia estadística, incluyendo regresión lineal y algunos modelos de análisis de la varianza.

El parámetro en probabilidades y variables aleatorias: El parámetro surge por primera vez en los modelos

de probabilidad, específicamente con el modelo binomial, donde se hace además una distinción entre un parámetro discreto (n) y un parámetro continuo (p). Al ser la primera vez que se alude al parámetro, se hace de la siguiente forma: "La función Binomial contiene dos variables, p y n de carácter distinto; para una distribución binomial determinada, p y n deben tener valores numéricos dados. Las variables de este tipo reciben el nombre de parámetros" (Mood y Graybill, 1962: 77).

Sin embargo, no es definido hasta entonces y luego, durante el resto del texto, se habla del parámetro, se estudia e incluso se realiza toda la inferencia respecto a él, sin haberlo definido. Llama la atención que al parámetro se refiera como variable, como una directa interpretación de la definición matemática de parámetro.

El parámetro en la inferencia estadística: En el primer capítulo de estimación (estimación puntual) se menciona el parámetro θ , como "que determina la distribución $f(x; \theta)$ de la población que va a ser muestreada" (Mood y Graybill, 1962: 185). Además se asume que θ proviene de un espacio paramétrico Θ .

Resumen: No se define el concepto de parámetro. Es tratado como una variable al igual que los parámetros matemáticos. Se introducen los conceptos de parámetro discreto y continuo para el modelo binomial.

Discusión

La mayoría de los libros de texto de estadística y probabilidad para ingeniería y administración de empresas tienen una estructura similar: estadística descriptiva, introducción a las probabilidades, variables aleatorias e inferencia estadística. Luego hay capítulos por lo general más específicos, como modelos de regresión, análisis de la varianza, control de calidad, series de tiempo, confiabilidad. Es en esta estructura que hemos observado cómo se ha desarrollado la idea del parámetro a lo largo del libro. En primer lugar, interesa ver cómo es tratado el parámetro en estadística descriptiva.

El parámetro es tratado como una medida descriptiva poblacional, asignándosele en algunos casos desde el inicio la notación con letras griegas que se suele usar en los modelos de probabilidad e inferencia estadística. Además, es posible observar que en algunos textos ya se está apuntando hacia la estimación e inferencia. Sin embargo, de los textos tratados, algunos hacen una introducción general al libro y a la estadística, haciendo alusión al parámetro desde entonces. Se

observa, por ejemplo, la separación entre estadístico y parámetro. Es posible, incluso, encontrar la definición habitual de ‘característica de la población’, a diferencia del estadístico que sería una ‘característica de la muestra’. En los libros de texto no siempre se define el parámetro, más bien se alude a él como si se tratara de la continuación de un concepto ya tratado (p.ej. Walpole *et al.*, 2012).

En algunos textos el parámetro no aparece en la estadística descriptiva, surgiendo recién en los modelos de probabilidad. En algún caso, es posible observar el parámetro como un elemento implícito, matemático, transparente, pero sin aludirlo (Devore, 2012). Pero lo más común es que, dado que ya se tiene que utilizar en las funciones de probabilidad, el concepto surja al final en los capítulos de variables aleatorias. Y lo hace principalmente cuando se calculan las medidas características de las variables aleatorias, siendo por lo tanto el parámetro asimilado a una media y varianza. Lo más común es, sin embargo, asociar la idea de parámetro inmediatamente a un ejemplo. En ciertos textos el concepto de parámetro está solo presente en un segundo plano, incluso al mencionarse los modelos Bernoulli y binomial, donde claramente se tienen parámetros.

En resumen, entre estadística descriptiva y modelos de probabilidad se ha podido observar que el parámetro es un elemento que si bien está presente, no siempre es definido. Su presencia se basa en considerarlo una medida característica de la población en clara analogía a las medidas características de la muestra.

En inferencia estadística el parámetro difícilmente puede estar ausente. Se deja claro que lo que se busca es encontrar estimadores de los parámetros, así como realizar pruebas de hipótesis acerca de ellos. Se mantiene, en general, la idea de que el parámetro es una característica de la población, sin ahondar más en el concepto.

En cuanto a los textos que fueron tratados como ‘clásicos’, en ninguno de los dos el parámetro es definido formalmente. El libro de Meyer (1992) no incluye estadística descriptiva. Se menciona el parámetro con el modelo binomial y, más adelante, se trata de dar una idea de su papel, asociándolo a los parámetros matemáticos (pendiente de una recta, por ejemplo) y a las medidas características más habituales: esperanza, varianza y coeficiente de correlación. Por su parte, el libro de Mood y Graybill, que tampoco contiene un capítulo de estadística descriptiva, menciona el parámetro al tratar el modelo binomial. No se da una

definición, pero sí se da una idea de su significado, introduciendo además la distinción entre parámetros discretos y continuos.

¿Es el parámetro fijo o aleatorio? Esta es una cuestión que no queda aclarada en la revisión que se realizó a los textos. El parámetro es expresado desde distintos puntos de vista, como una variable o una cantidad desconocida (Mood y Graybill, 1963), un número desconocido (Devore, 2012), constantes (Meyer 1992), valor fijo y desconocido (Walpole *et al.*, 2012), un valor numérico (Newbold *et al.*, 2013), o una característica numérica de la población (Anderson *et al.*, 2012).

Antes de finalizar este análisis, no queremos dejar de lado la clara relación que algún texto hace entre parámetro estadístico y parámetro matemático. De hecho, se pudo observar dos textos que hacen alusión directa al parámetro como un elemento matemático. Surge la duda, entonces, si al no definir los textos el parámetro, ¿estarán suponiendo que el estudiante tomará el concepto de sus conocimientos de matemática? ¿Es lo mismo un parámetro matemático que un parámetro estadístico?

Conclusiones

El parámetro estadístico parece existir *per se*. Desde que los estudiantes se enfrentan a la estadística, tratan el parámetro como si lo hubieran conocido ya desde antes. Esto se refleja en los manuales de estadística comúnmente utilizados en las carreras universitarias.

El parámetro estadístico es un elemento esencial a lo largo de los cursos de estadística. En estadística descriptiva se estudian diferentes medidas que buscan explicar los fenómenos de la población en estudio a través de muestras. Se trata, por tanto, de un primer acercamiento a estudiar características de la población. Elementos como promedio, mediana, moda, entre otros, no son más que herramientas para poder describir la muestra y, a través de ella, a la población. Más adelante, los modelos de probabilidad están contruidos en base a los parámetros. Los diferentes modelos son planteados de forma general, haciendo que los parámetros los identifiquen como particulares. Es en la inferencia estadística donde se comienzan a plantear dudas sobre el parámetro, se le estima y se le confronta con otros valores posibles. De esta forma, el parámetro consigue ser un eje del estudio de la estadística.

Los libros de texto que se han estudiado en el presente trabajo

tienen básicamente esta estructura: estadística descriptiva, probabilidad y variable aleatoria, inferencia, otros temas (regresión, análisis de la varianza, etc.). El problema surge a la hora de definir el parámetro. No siempre se define, de hecho. Nos encontramos con situaciones en que el parámetro surge recién en los modelos de probabilidad, sin definición alguna, dándoseles el papel que en la matemática tenían: generalizador. Pero no toma el parámetro la importancia que realmente tiene antes de la inferencia estadística. Es en estos capítulos, los de inferencia, donde el parámetro es el objeto de estudio y todos los análisis se centran en él. Sin embargo, se ve que, en general, los textos no se detienen antes a contextualizar el parámetro. Evidentemente, el concepto matemático de parámetro es tomado en un segundo lugar, después de las variables. Si queda claro que es una cantidad desconocida, que podría ser fija o aleatoria, según el texto. Asimismo, al asociarse el parámetro a medidas características de la población, se hace una relación en estadística descriptiva con los estadísticos. Sin embargo, con esta forma de plantearlo, se está apuntando solamente a los parámetros que efectivamente representan medidas características, dejando de lado aquellos que no lo son directamente.

Los libros de textos tienen diferentes formas de definir el parámetro, cuando lo hacen. En general coinciden en que los parámetros caracterizan a la población. También tienen como elemento común el hecho de asociar los parámetros a medidas características poblacionales. Esto puede resultar un poco ambiguo, pues un parámetro no siempre es una medida característica (por ejemplo los parámetros del modelo binomial, geométrico, beta, gamma, etc.). Si en un curso se usa más de un libro de texto, quedará más en evidencia esta ambigüedad, pues rara vez coincide la conceptualización entre un libro y otro. En todos los textos, incluidos los considerados ‘clásicos’, pareciera asumirse que el estudiante conoce de antemano el parámetro. Es necesario realizar una profunda meditación sobre este concepto, que en sí es muy distinto en su conceptualización estadística que matemática.

AGRADECIMIENTOS

Lautaro Vásquez Ortiz fue parcialmente financiado por el proyecto UTA Mayor 4748-20, Universidad de Tarapacá, Chile. Alvaro Cortínez Pontoni fue parcialmente financiado por el Proyecto de Educación 4731-15, Universidad de Tarapacá, Chile.

REFERENCIAS

- Anderson D, Sweeney D, Williams T (2012) *Estadística para Negocios y Economía*. Cengage Learning. México 1091 pp.
- Bardini C, Radford L, Sabena C (2005) Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. En Chick HL, Vincent JL (Eds.) *Proc. 29th Conf. International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne, Australia. Vol. 2: 129-136.
- Chevallard Y (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Rech. Didact. Mathemat.* 12: 73-112.
- Corona L, Martínez J (2011) *Estadística Aplicada al Ámbito Jurídico*. Universidad de Guadalajara-Tribunal Electoral del Poder Judicial del Estado de Jalisco. México. 300 pp.
- Cortínez A., Alamilla N, Albert JA, Ríos J (2015). Razonamiento acerca del significado de los parámetros en los modelos de probabilidad en estudiantes universitarios. En Flores R (Ed.) *Acta Latinoamer. Matemática Educativa* 28. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., México. pp. 283-290.
- Devore J (2012) *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. 7ª ed. Cengage Learning. México. 742 pp.
- Ely R, Adams AE (2012) Unknown, placeholder, or variable: what is x?. *Mathem. Educ. Res. J.* 24: 19-38.
- Espinel M, Ramos R, Ramos C (2007) Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números. Rev. Didact. Matemát.* 67: 15-23.
- Meyer P (1992) *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, DE, EUA. 480 pp.
- Montgomery D, Runger G (2012) *Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería*. Limusa-Wiley. México. 937 pp.
- Mood A, Graybill F (1963) *Introduction to the Theory of Statistics*. 2ª ed. McGraw-Hill. Nueva York, EUA. 536 pp.
- Newbold P, Carlson W, Thorne B (2013) *Estadística para Administración y Economía*. Pearson/Prentice Hall. Madrid, España. 1063 pp.
- Soto D, Cantoral R (2014) Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bol. Educ. Matemát.* 28(50): 1525-1544.
- Ursini S, Trigueros M (2004) How do high school students interpret parameters in algebra?, en M. Johnsen y A. Berit (Eds.) *Proc. 28th Conf. International Group for the Psychology in Mathematics Education*. Bergen, Noruega. Vol.4: 361-369.
- Vallecillos A (1999) Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bull. Int. Stat. Inst.: Proc. 52nd Sess. International Statistical Institute.* pp. 201-204.
- Walpole R, Myers R, Myers S, Ye K (2012) *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. 9ª ed. Pearson Educación. México. 739 pp.

THE TEACHING TRANSPARENCY PROBLEM OF THE PARAMETER IN STATISTICS TEXTBOOKS

Solange Aranzubía Vera, Blanca Rosa Ruiz Hernández, Lautaro Vásquez Ortiz, José Armando Albert Huerta and Álvaro Cortínez Pontoni

SUMMARY

The parameter, whose estimation and validation is central in the statistical inference, feigns simplicity in the school speech, but it hides a non-attended complexity. This investigation seeks to provide evidence of this problem from the didactic perspective of the textbooks regarding the articulation of the different

meanings given to the parameter along the contents of an introductory college course in probability and statistics. The results show some inconsistencies and even the omission of a clear conceptualization in the language of textbooks, as well as that its simplicity is only apparent.

O PROBLEMA DA TRANSPARÊNCIA DIDÁTICA DO PARÂMETRO EM LIVROS DE TEXTO DE ESTATÍSTICA

Solange Aranzubía Vera, Blanca Rosa Ruiz Hernández, Lautaro Vásquez Ortiz, José Armando Albert Huerta e Álvaro Cortínez Pontoni

RESUMO

O parâmetro, cuja estimação e validação é central na inferência estatística, parece simples no discurso escolar, mas esconde uma complexidade não atendida. Esta pesquisa procura evidenciar este problema do ponto de vista didático dos livros de texto no que se refere à articulação dos diferentes significados que são

atribuídos ao parâmetro ao longo dos conteúdos de um curso introdutório de probabilidade e estatística universitária. Os resultados mostram algumas inconsistências e até mesmo a omissão de uma conceituação clara do parâmetro no discurso do livro de texto, assim como sua simplicidade é apenas aparente.