ALGUNAS CONEXIONES ENTRE DINÁMICA INDIVIDUAL Y COLECTIVA

HERIBERTO ROMÁN-FLORES, IVÁN AGUIRRE-CIPE y VÍCTOR AYALA

RESUMEN

El concepto de caos o dinámica compleja ha sido exhaustivamente estudiado durante varias décadas, ello debido tanto por la riqueza intrínseca de esta teoría, como por sus diversas aplicaciones en el modelamiento y solución de problemas reales. En este contexto, cuando estudiamos la evolución en el tiempo de un sistema dinámico y asumimos que esa dinámica viene dada por una cierta función f definida y con valores sobre un cierto espacio X entonces, para cada elemento x perteneciente a X, su órbita bajo iteración x, f(x), $f^2(x)$, $f^3(x)$,… describe como se mueve el 'estado' x sobre el espacio X vía la dinámica inducida por f. Por otro lado, algunas veces no es suficiente conocer esta dinámica individual, sino que necesitamos saber cómo se mueven conjuntos de puntos en el espacio base X (como por ejemplo, en el estudio de fenómenos migratorios, demográficos o epidemiológicos), y esto nos lleva al análisis de problemas de dinámica colectiva. En este artículo estudiamos algunas conexiones entre dinámica individual y dinámica colectiva y, en esta dirección, las preguntas fundamentales que intentamos responder son las siguientes: ¿Cuál es la relación entre la dinámica del movimiento individual y la dinámica del movimiento colectivo? ¿Caos individual o dinámica individual compleja implica caos o dinámica colectiva compleja? ¿Y viceversa?

Es conocido que una amplia variedad de problemas reales pueden ser modelados mediante un sistema dinámico discreto (SDD) del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_i \in X,\ n = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

donde (X, d) es un espacio métrico y $f\colon X\rightarrow X$ es una función continua.

Un aspecto esencial en el SDD de la Eq. (1) es comprender el comportamiento de cada una de sus órbitas x, f(x), $f^2(x)$,…, $f^n(x)$ cuando n tiende a infinito. Esto significa conocer el destino final de cada órbita y, generalmente, esta es una tarea compleja. En cierto sentido, el estudio de las órbitas en un SDD nos dice como se mueven (en tiempo discreto) los puntos en el espacio base X y, en muchos casos, estas órbitas presentan una estructura caótica.

A pesar de no considerar elementos aleatorios, no es posible predecir el comportamiento de un sistema caótico. ¿Una mariposa en Brasil podría causar un tornado en Texas?, interrogante que fuera planteada por Lorenz (1963). Más generalmente, ¿el comportamiento de un sistema podría ser inestable respecto de perturbaciones de pequeña amplitud?

Muchos sistemas biológicos muestran un comportamiento dinámico complejo, tales como caos y oscilaciones de varios tipos. En particular, ¿somos capaces de predecir el destino de las poblaciones para su desarrollo y conservación?

Son relevantes referencias como Turchin (2003) y Strogatz (2000), en donde se introduce la noción de caos y de sistemas complejos motivados por ejemplos provenientes de las ciencias biológicas y de la ecología, res-

PALABRAS CLAVE / Caos / Caos Multívoco / Densidad Periódica / Dinámica Compleja / Función Mezclante / Sensitividad / Transitividad /

Recibido: 07/04/2017. Modificado: 01/10/2018. Aceptado:04/10/2018.

Heriberto Román-Flores. Magister en Matemática, Universidad Técnica de Estado, Chile. Doctor en Ciencias mención Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil. Investigador, Universidad de Tarapacá (UTA), Chile. Dirección: Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá. Antofagasta 1520, Arica, Chile. e-mail: hroman@uta.cl

Iván Aguirre-Cipe. Magister en Matemática, Universidade de São Paulo, Brasil. Profesor, Universidad de Tarapacá. e-mail: iaguirrec@uta.cl

Víctor Ayala Bravo. Magister en Matemática, Universidad Técnica de Estado, Chile. Doctor en Ciencias mención Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil. Investigador, Universidad de Tarapacá, Chile. e-mail: vayala@uta.cl

pectivamente, así como también Cushing *et al.* (2000) donde los autores muestran que la complejidad puede ser derivada integrando mecanismos biológicos a simples modelos matemáticos.

Por otro lado, la transición al caos multívoco se va generando naturalmente por una razón muy simple, y es que algunas veces no es suficiente conocer esta dinámica individual, sino que necesitamos saber cómo se mueven conjuntos de puntos en el espacio base X, y esto nos lleva a un problema de dinámica colectiva, es decir, al análisis de sistemas dinámicos discretos multívocos (SDDM).

Por ejemplo, hoy en día es usual colocar transmisores especiales sobre diferentes especies biológicas para saber cómo ellas se desplazan dentro de su hábitat. Así, si denotamos por X el hábitat de una especie dada y elegimos un representante individual $x \in X$, entonces podemos obtener información acerca del movimiento de x en el ecosistema X y, de esta forma, podemos construir una función de desplazamiento individual $f: X \rightarrow X$.

Eventualmente, esta función puede ser caótica (i.e., poseer una dinámica compleja) o no, pero la cuestión fundamental es ¿Cuál es la relación entre la dinámica del movimiento individual y la dinámica del movimiento colectivo? ¿Dinámica individual compleja implica dinámica colectiva compleja? ¿Y viceversa?

Estas son las preguntas principales que motivan este trabajo, y las cuales intentaremos responder aunque sea parcialmente, para lo cual presentamos una recopilación de algunos de los principales resultados obtenidos en esta dirección en los últimos años.

Preliminares

En este trabajo, usaremos el concepto de caos o dinámica compleja en el sentido de Devaney (1989). Esto significa que si (X, d) es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una función continua, entonces decimos que f es caótica si verifica las siguientes tres condiciones:

a) f es topológicamente transitiva, es decir, para todo par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X existe un número natural k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

b) f posee densidad periódica, es decir, el conjunto de los puntos periódicos de f es denso en X.

c) f es sensitivamente dependiente a las condiciones iniciales, es decir, existe $\delta > 0$ (constante de sensitividad) tal que para todo elemento $x \in X$ y toda vecindad V de x, existen un punto $y \in V$ y un entero no negativo n tales que

$$d(f^n(x),\ f^n(y)) \geq \delta.$$

Diremos que una función continua $f: X \rightarrow X$ posee dinámica compleja cuando, salvo casos triviales, posee alguna de estas propiedades. Por ejemplo, la función identidad no satisface a) ni c). Sin embargo, a pesar de que cada $x \in X$ es un punto periódico, ella no posee dinámica compleja.

Antes de entrar en aspectos más técnicos, describamos en palabras el significado práctico de caos según Devaney (1989). Primero, la condición a) utiliza el concepto de conjunto abierto U que en esencia significa que cada $x \in U$ es un punto interior, i, e., x (estado) posee la propiedad de poder moverse dentro de U en cualquier dirección de U, pero este movimiento podría no alejarlo demasiado de x. Luego, a) nos dice que la iteración bajo f de cualquier abierto U deberá alcanzar cualquier abierto V de X.

Un buen ejemplo de esta situación se produce cuando pretendemos distribuir en forma homogénea el azúcar en una taza de café con una cuchara.

Un estado x se dice periódico para la dinámica determinada por f, si después de dar un paseo por X a través de un número finito de iteraciones de f, volvemos a x. Entonces, la condición b) impone la existencia de un estado periódico en cada abierto de X. Más que esto, cada estado de X puede ser aproximado por una sucesión de estados periódicos. Un excelente ejemplo de esta situación es la dinámica determinada por el juego de billar 'sin roce', en el cual la bola se mueve en forma indefinida.

En efecto, si cada banda de la mesa es representada por el intervalo cerrado de extremos 0 y 1, se sabe que al golpear en un número racional de una determinada banda, ésta continuará golpeando bandas sólo en coordenadas racionales. Además, en un número finito de pasos la bola regresará al estado inicial y así sucesivamente. Entonces, esta dinámica posee un conjunto denso de estados periódicos en cada una de las cuatro bandas. Si por el contrario la bola inicia en una coordenada irracional, obtendremos una órbita densa que se relaciona directamente con la condición a). Véase *Ejemplo 1* más adelante.

Finalmente, la condición de sensitividad exige la existencia de una constante positiva δ tal que, para cada estado x del sistema, existe un estado y próximo de x, de tal forma que alguna iteración simultánea de x e y, separa ambos estados en una distancia superior a δ. Este tipo de fenómeno fue observado por primera vez por Lorenz (1963), quien era experto en dinámica climática, y establece sin duda alguna que, a pesar de que la dinámica considerada es continua, 'muestras' muy cercanas pueden estar alejadas en un futuro finito.

Invitamos al lector a reflexionar sobre estas ideas y, sobre todo, a intentar descubrir la complejidad de los sistemas sociales, biológicos, ecológicos, economicos, etc., con los cuales trabaja diariamente.

Si (X, d) es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una función continua, decimos que (X, f) o (X, d, f) es un sistema dinámico.

Observación 1. Es importante destacar que si X no tiene puntos aislados, entonces basta que exista una órbita densa para que f sea transitiva. De hecho muchos autores definen la transitividad como equivalente a la existencia de una órbita densa pero, en rigor, esta equivalencia se da bajo algunas restricciones, por ejemplo que el espacio sea compacto y sin puntos aislados (Devaney, 1989; Kolyada y Snoha, 1997). Este es exactamente el caso de la dinámica del billar para una coordenada inicial irracional.

También cabe notar que, especialmente en el ámbito de las ciencias aplicadas, la sensitividad ha sido usualmente considerada como la idea central del caos; sin embargo, a comienzos de los años 90 sorpresivamente fue probado que la transitividad junto con la densidad de puntos periódicos implican dependencia sensitiva (Banks *et al.*, 1992). Más aún, posteriormente se probó que para funciones definidas sobre intervalos, la transitividad implica caos (Vellekoop y Berglund, 1994).

Notemos también que, mientras la transitividad es una propiedad de carácter topológico, la sensitividad es una propiedad de tipo métrico y la densidad de puntos periódicos es de tipo combinado topológico-algebraico. Luego, si deseamos relacionar la dinámica individual con la dinámica colectiva en el sentido de Devaney, necesitamos definir una estructura métrica sobre la clase de subconjuntos de X.

La métrica usual sobre conjuntos es la distancia de Hausdorff, pero para que ella esté bien definida debemos restringir la clase de subconjuntos; por ejemplo, considerar la clase K(X) de subconjuntos compactos y no vacíos de X (Klein y Thomson, 1984).

Recordamos que en un espacio métrico X un subconjunto $A \subseteq X$ es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado (Klein y Thomson, 1984). Si $A \in K(X)$ y $\varepsilon>0$, definimos la ε-dilatación de A como el conjunto

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, A)<\varepsilon\},$$

en donde $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$.

Entonces, si A, B $\in$ K (X), definimos la distancia de Hausdorff entre A y B como $H(A; B) = \inf\{\varepsilon>0: B \subset N(A,\varepsilon) \text{ and } A \subset N(B; \varepsilon)\}$.

Para mayores detalles sobre propiedades de la distancia *H* véanse Nadler (1978), Klein y Thompson (1984), Illanes y Nadler (1999) Rojas-Medar *et al.* (1999), Román-Flores (2003), Román-Flores y Chalco-Cano (2003), y Román-Flores *et al.* (2011).

De esta forma, dado el espacio métrico (X, d) podemos considerar el espacio métrico (K(X), H) de la clase de subconjuntos compactos no vacíos de X, equipado con la métrica de Hausdorff H inducida por d el cual, desde un punto de vista topológico, posee la mismas propiedades del espacio métrico (X, d), tales como separabilidad, completitud y compacidad (Klein y Thomson, 1984).

Como la imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es también un conjunto compacto, entonces podemos definir la extensión natural $\bar{f}: K(X) \to K(X)$ de *f*, mediante la fórmula $\bar{f}(A) = f(A) = \{f(a): a \in A\}$ y, en consecuencia, extender el sistema dinámico discreto (Eq. 1) al sistema dinámico discreto multívoco siguiente:

$$A_{n+1} = \bar{f}(A_n),\ A_i \in K(X),\ n = 1,2,\ldots \qquad (2)$$

De este modo, estudiar las conexiones caóticas entre la dinámica individual y la dinámica colectiva se traducen, entonces, en estudiar las conexiones entre la dinámica de f y la dinámica de $\bar{f}$.

Resultados Iniciales

A comienzos de los 2000 aparecieron dos artículos pioneros en esta área. El primero de ellos establece algunas conexiones entre la transitividad de f y la transitividad de $\bar{f}$ (Román-Flores, 2003), mientras que el segundo establece relaciones dinámicas entre f y $\bar{f}$, que se refieren a la dependencia sensitiva y a la densidad de puntos periódicos (Román-Flores y Chalco-Cano, 2005).

Observación 2. Para ser más justos con la historia de la dinámica en hiperespacios, debemos citar el artículo (Bauer y Sigmund, 1975) en donde, en un contexto algo diferente, ya se mencionan algunos resultados en dinámica multívoca.

Nuestros primeros resultados pueden ser enunciados de la forma siguiente:

Teorema 1. Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua. Si la extensión $\bar{f}: K(X) \to K(X)$ es transitiva, entonces f es también transitiva.

En palabras, el *Teorema 1* establece que la dinámica colectiva determinada por f no puede ser transitiva si la dinámica individual no lo es. El ítem a) del resultado a continuación expresa lo mismo respecto de la propiedad de sensitividad. Sin embargo, la condición b) determina una dirección contraria a las anteriores. En efecto.

Teorema 2. Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua. Entonces, si (K(X), f) es sensitivamente dependiente, entonces (X, f) es también sensitivamente dependiente.

Si X es compacto y (X, d) posee densidad periódica, entonces $(K(X), \bar{f})$ también posee densidad periódica.

Además, también mostramos que la implicación reciproca en el *Teorema 1* no es necesariamente cierta, como lo demuestra el siguiente contra-ejemplo.

Ejemplo 1. Considere la traslación irracional del círculo $S^1 = \{\in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$ definida como $T_\lambda: S^1 \to S^1$, $T_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda)}$, en donde λ es un número irracional positivo.

Entonces probaremos que T_λ es transitiva pero su extensión $\bar{T}_\lambda: K(S^1) \to K(S^1)$ no lo es. Para ello usaremos el hecho que $\bar{T}_\lambda$ y todas sus iteraciones $\bar{T}_\lambda^n$ son aplicaciones continuas que preservan el diámetro (Román-Flores, 2003).

Geométricamente, la distancia de Hausdorff es una medida de similitud. En realidad, decir que dos compactos están 'cerca' en la métrica de Hausdorff implica que sus diámetros están también próximos. En particular, en los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$ significa que además de próximos, ellos son geométricamente similares.

De este modo, si por ejemplo elegimos un punto $z \in S^1$ y un compacto $A \subset S^1$ con *diám*(A)=1, entonces para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño tenemos que las bolas abiertas $U = B(\{z\}, \varepsilon)$ y $V=B(A, \varepsilon)$ en el espacio $K(S^1)$ son tales que:

$$K \in B(\{z\}\varepsilon) \Rightarrow \text{diám}(K) \approx 0 \Rightarrow \text{diám}\left(\bar{T}_\lambda^n(K)\right) \approx 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que

$$F \in B(A,\varepsilon) \Rightarrow \textit{diám}(F) \approx 1 \Rightarrow \textit{diám}\left(\bar{T}_\lambda^n(F)\right) \approx 1.$$

Como un conjunto no puede tener diámetro cercano a 0 y a 1 simultáneamente, se obtiene $\bar{T}_\lambda^n(U) \cap V = \varnothing$, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\bar{T}_\lambda$ no es transitiva.

Observación 3. Es importante notar que, para λ irracional, T_λ es siempre transitiva, no posee puntos periódicos y, puesto que es una isometría, tampoco puede ser sensitiva. En cambio, si $\lambda = \frac{p}{q}$ es racional ocurre que T_λ nunca es transitiva. En efecto, en este caso todo punto es periódico (de periodo q) y, puesto que es una isometría, tampoco puede ser sensitiva (Devaney, 1989).

Avances en Transitividad

En el *Teorema 1* establecemos solamente condiciones necesarias pero no suficientes para la transitividad de f en relación con $\bar{f}$. Para buscar condiciones suficientes se debe hacer uso de otros dos importantes conceptos en Teoría de Caos, los cuales son:

- Si (X, d) es un espacio métrico y $f: X \to X$ es una función continua, entonces f es débilmente mezclante (*weakly mixing*) sobre *X*, si la función producto $f \times f$ es transitiva sobre $X \times X$ en donde $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ y la distancia en $X \times X$ es $\rho((x, y), (u, v)) = \max(d(x, u), d(y, v))$.
- Si (x, d) es un espacio métrico y $f: X \to X$ es una función continua, entonces f es mezclante (*mixing*) sobre X, si para todo par de abiertos no vacíos U y V de *X* existe un número natural N tal que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$, $\forall k \geq N$.

Puede probarse que vale la siguiente implicación (Kolyada, 1997): f mezclante ⇒ f débilmente mezclante ⇒ f transitiva.

Por otro lado, y en conexión con el concepto de función mezclante, Banks (2005) y Peris (2005) probaron en forma simultánea que:

Teorema 3. Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) f es débilmente mezclante sobre X, b) $\bar{f}$ es débilmente mezclante sobre K(X), y c) $\bar{f}$ es transitiva sobre K(X). Además, en el caso mezclante, ambos prueban el siguiente resultado:

Teorema 4. Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) f es mezclante sobre X, y b) $\bar{f}$ es mezclante sobre K(X).

El *Teorema 3* es relevante porque bajo ciertas hipótesis cierra el *Teorema 1*. Es decir, la transitividad de f y de $\bar{f}$ se producen en forma simultánea. Además, establece la equivalencia entre el caos individual y el colectivo en el caso débilmente mezclante. Análogamente, el *Teorema 4* establece la equivalencia entre ambos tipos de caos para el caso mezclante.

Observación 4. En el *Ejemplo 1* mostramos que cuando λ es irracional, la traslación T_λ es transitiva pero su extensión $\overline{T}_\lambda : k(S^1) \to k(S^1)$ no lo es. Así, de acuerdo con *Teorema 3*, esto se debe necesariamente a que T_λ no es débilmente mezclante.

Para ver esto debemos recurrir a un importante resultado obtenido por Furstenberg en los años 60 (Furstenberg, 1967) el cual puede ser descrito del siguiente modo:

Sea (X, d) un sistema dinámico transitivo y U, V dos abiertos no-vacíos en X. Considere el conjunto

$$N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \varnothing\},$$

el cual es obviamente no-vacío. Entonces la idea básica es que ciertas formas más fuertes de la transitividad pueden ser caracterizadas por ciertas propiedades de los conjuntos N(U,V). En efecto, Furstenberg prueba que f es débilmente mezclante si y solo si N(U,V) contiene bloques arbitrariamente grandes de números naturales consecutivos, para todo par de abiertos no-vacíos U, $V \subset X$.

En nuestro caso, sabemos que T_λ traslada cada punto en S^1 en un ángulo con longitud de arco $2\pi\lambda$. Así entonces, supongamos sin pérdida de generalidad que $0<\lambda<1$ y elijamos dos abiertos no-vacíos arco-conexos particulares U, V en S_1 tales que U = V y, además, long (U) = $2\pi\lambda$.

Se tiene, como T_λ preserva la longitud de arco, el abierto U 'recorre' todo S^1 (y volviéndose a encontrar con U) como máximo en un tiempo discreto equivalente a $n_0 = \left[\!\left[\frac{2\pi}{2\pi\lambda} \right]\!\right] + 1$ iteraciones.

Más precisamente, puede verse que las cadenas consecutivas en $N(U,U)^c$ están acotadas por n_0 mientras que las cadenas en N(U,U) tienen longitud máxima igual a 2. En efecto, mientras U se mueve bajo iteración por la acción de T_λ no puede permanecer intersecándose a sí mismo por más tiempo, lo cual contradice la condición de Furstenberg para que T_λ sea débilmente mezclante. Así, por *Teorema 3*, $\overline{T}_\lambda$ no puede ser transitiva.

Avances en Sensitividad

El *Teorema 2* a), referente a la relación entre sensitividad individual y sensitividad colectiva, también ha sido cerrado recientemente. Por una parte, Wang *et al.* (2009) introducen el concepto de función colectivamente sensitiva del modo siguiente:

Si (x, d) es un espacio métrico y $f: X \to X$ es una función contínua, entonces f es colectivamente sensitiva, con constante de sensitividad δ si para cualquier número finito $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de puntos distintos de X y un $\varepsilon>0$ arbitrario, existen el mismo número $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de puntos distintos de X y $k \in \mathbb{N}$ verificando las siguientes dos condiciones:

(i) $d(x_i, y_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$;
(ii) existe i_o, con $1 \leq i_0 \leq n$, tal que

$$d(f^k(x_i), f^k(y_{i_0})) \geq \delta, \ \forall\ 1 \leq i \leq n$$

ó

$$d(f^k(x_{i_0}), f^k(y_i)) \geq \delta, \ \forall\ 1 \leq i \leq n$$

Obviamente, el concepto de sensitividad colectiva es más fuerte que el de sensitividad. Ahora bien, usando esta nueva definición de sensitividad colectiva, Wang *et al.* (2009) prueban el siguiente resultado de caracterización de la sensitividad de f en relación a $\overline{f}$, y viceversa.

Teorema 5. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y f: X→ X una función contínua. Las siguientes condiciones son equivalentes: a) $(K(X), H, \overline{f})$ es sensitivo, b) $(F(X), H, \overline{f})$ es sensitivo, y c) (X,d,f) es colectivamente sensitivo, en donde F(X) es la clase de todos los subconjuntos finitos y no vacíos de X.

En general, es claro entonces que la mera sensitividad de f no alcanza para implicar la sensitividad de $\overline{f}$. Sin embargo, Wang *et al.* (2009) no proveen en sus trabajo un ejemplo de un sistema dinámico (X, f) sensitivo y tal que su extensión $(K(X), \overline{f})$ sea no-sensitivo. Por otro lado, Sharma y Nagar (Sharma y Nagar, 2010) utilizan distintas nociones de sensitividad. En particular estudian la siguiente:

Si (X, d) es un espacio métrico y $f: X \to X$ es una función continua, entonces f es fuertemente sensitiva si existe $\delta>0$ tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon>0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, existe $y \in X$ con $d(x,y)<\varepsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y))>\delta$.

Como era de esperar, esta definición es más fuerte que sensitividad (Sharma y Nagar, 2010) y, como consecuencia directa, ellos obtienen que:

Teorema 6. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f: X \to X$ una función continua. *Si* (K (X), f) es fuertemente sensitivo, entonces *(X, f)* es fuertemente sensitivo.

Además, Sharma y Nagar (2010) muestran un ejemplo de un sistema dinámico (X, d, f) sensitivo tal que su extensión $(K(X), H, \overline{f})$ es no-sensitivo. Este ejemplo no es simple. De hecho, su construcción implica el uso de elementos de Dinámica Simbólica. Además, para el caso fuertemente sensitivo, Sharma y Nagar (2010) obtienen el siguiente significativo resultado:

Teorema 7. Si (X,d,f) es fuertemente sensitivo, entonces $(K(X), H, \overline{f})$ es también fuertemente sensitivo.

Así, combinando el *Teorema 6* con el *Teorema 7*, obtenemos

Teorema 8. Si (X,d,f) es un espacio métrico compacto y $f: X \to X$ es una función continua, las siguientes condiciones son equivalentes: a) $(K(X), H, \overline{f})$ es fuertemente sensitivo, y b) (X,d,f) es fuertemente sensitivo.

Esta es otra forma elegante de cerrar el *Teorema 2* a), encontrando una definición apropiada que permite asegurar que en el caso compacto, este tipo de sensitividad ocurre de manera simultánea tanto para f como para $\overline{f}$.

En conexión con estos resultados, Subrahmonian Moothathu (2007) muestra que "casi todos los sistemas dinámicos sensitivos relevantes" son en realidad fuertemente sensitivos. En particular, esto vale para la clase de funciones intervalares, la sensitividad es equivalente a la sensitividad fuerte y, por esta razón junto con el *Teorema 8*, tenemos un nuevo resultado para funciones intervalares:

Teorema 9. Denote por I un intervalo de la recta. Si $f: I \to I$ es una función intervalar continua, entonces las siguientes condiciones son equivalentes: a) $(K(I), H, \overline{f})$ es sensitivo, y b) (I, d, f) es sensitivo.

Otros Avances Importantes: Caos en Subespacios Especiales de *K*(*X*)

Es conocido que la implicación reciproca en *Teorema 2* parte b) no es necesariamente cierta. De hecho, Banks (2005) muestran un ejemplo de un espacio métrico compacto X y una aplicación contínua $f: X \to X$ tal que su extensión $\overline{f}$ posee un conjunto denso de puntos periódicos, pero f no.

Aunque, en general, el problema de saber cuáles son las condiciones que debe cumplir una función continua $f: X \to X$ para que la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos para $\overline{f}$ implique la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos para f, es un problema que aún permanece abierto. Pero, al menos, se sabe que sobre ciertos espacios especiales, tales como arcos y gráficas, vale la implicación recíproca en *Teorema 2* parte b). Para mayores detalles sobre este punto se puede consultar a Méndez-Lango (2012), Acosta *et al.* (2017) y las referencias allí citadas.

Existen otros factores asociados al concepto de caos que han ido tomando fuerza en los últimos años, tales como la predictibilidad y la incerteza implícita en un sistema dinámico. Una característica que es propia de los sistemas dinámicos caóticos es que es muy difícil predecir su evolución en el tiempo salvo, quizás, en un período muy corto. Un ejemplo clásico de ello son algunos sistemas climáticos, en donde es casi imposible predecir su estado después de un período largo de tiempo.

Por otra parte, en el modelamiento matemático de fenómenos reales, aparecen normalmente ecuaciones no lineales en donde es muy difícil establecer con exactitud los valores de ciertos parámetros que es necesario incorporar. Pero esa inexactitud o incerteza respecto del valor de tal o cual parámetro, en la práctica se traduce en que la dinámica que gobierna tal fenómeno resulte ser un sistema con dinámica simple o altamente compleja.

En general, los sistemas extendidos $\left(K(X),\bar{f}\right)$ tienen una dinámica más compleja que el sistema dinámico inicial (X, f) en el espacio base. Pero lo sorpresivo es que hay extensiones intermedias que pueden tener una dinámica asombrosamente más simple que las dos anteriores.

Por ejemplo, es conocido que si X es un arco compacto o una gráfica compacta (i.e. homeomorfo al intervalo [01] o unión finita de arcos que se intersectan solo en un punto extremo) y C(X) es la clase de subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de X, entonces ninguna función contínua f: X → X puede tener una extensión $\bar{f}: C(X) \to C(X)$ que sea transitiva, para lo cual se puede consultar a Banks (2005) o también a Méndez Lango (2012).

En este contexto, recientemente Román-Flores (2016) han probado un resultado que engloba, sobre intervalos, al inmediatamente anterior de Banks (2005). Sin embargo, al enunciar este nuevo resultado, debemos recurrir a la teoría y el lenguaje que son típicos en los espacios de Baire, donde el concepto de categoría juega un rol fundamental. A continuación presentamos algunas ideas básicas sobre estos conceptos:

• Un espacio topológico X es un espacio de Baire si para cualquier familia contable $\{A_n / n \in \mathbb{N}\}$ de cerrados que cubre a X, existe al menos un A_n tal que *Int* (A_n) ≠ Ø.

Sea X un espacio de Baire. Entonces:

• A ⊂ X es llamado 'nunca denso' si su clausura no tiene interior, i.e. $Int\left(\bar{A}\right) = \varnothing$.

• Cualquier unión contable de conjuntos nunca densos es llamado conjunto de 'primera categoría'.

• Cualquier conjunto que no es de primera categoría se dice que es de 'segunda categoría'.

• El complemento de un conjunto de primera categoría es llamado un conjunto residual.

• Todo conjunto residual es de segunda categoría en X.

▪ Todo conjunto residual es denso en X.

Es importante notar que todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

En particular, si X es un espacio métrico completo, entonces el espacio de funciones continuas C(X)={f: X→X/continua} equipado con la métrica del supremo d_∞, i.e. $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x) - g(x)|$ también un espacio de Baire.

Desde un punto de vista topológico, si X es un espacio de Baire entonces decimos que 'la mayoría de los elementos de X' satisfacen una cierta propiedad (P) si el conjunto de todos los elementos x∈X que no satisfacen la propiedad (P) es de primera categoría. Así, los conjuntos de primera categoría pueden ser pensados como conjuntos pequeños.

Con estas ideas previas podemos ahora presentar nuestro próximo resultado (Román-Flores y Chalco Cano, 2015; Román-Flores, 2016)), para el caso particular cuando X = 1 es un intervalo:

Teorema 10. Sea 1=[a,b], a<b un intervalo y considere $k_c(1)$ la clase de todos los subconjuntos compactos convexos y no vacíos de I si $\bar{f}$ es la extensión natural de f a K_c (I). Entonces: a) $\bar{f}$ no es transitiva sobre K_c (I), para toda función $f: 1 \to I$ contínua; b) $\bar{f}$ no posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre K_c(I), para la mayoría de las funciones continuas $f: 1 \to I$; y c) $\bar{f}$ no es sensitiva sobre K_c(I), para la mayoría de las funciones contínuas $f: I \to I$.

Este resultado nos dice que, en general, cuando X = I es un intervalo, la complejidad (en el sentido de Devaney) de la dinámica de la extensión $\bar{f}: K_c(I) \to K_c(I)$ es menor o igual que la complejidad de la dinámica de $f: I \to I$ sobre el espacio base.

A continuación analizaremos algunos ejemplos para ver los escenarios totalmente diferentes que podemos tener en relación a la dinámica de f y su extensión $\bar{f}$, dependiendo del espacio (extensión) considerado. Antes de eso, debemos saber que, al menos sobre intervalos, existe un resultado muy útil que permite distinguir entre algunas funciones que son transitivas, cuáles de ellas son mezclantes.

Lema 11 (Liao *et al*., 2007). Sea f: I→I una función transitiva. Entonces se verifica una (y solo una) de las siguientes condiciones: a) f es mezclante, ó b) existe un punto fijo p ∈ (a, b) tal que f([a,p])=[p,b] y f([p,b])=[a,p].

Ejemplo 2. Considere la función 'tienda' f: [0,1] → [0,1] definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x) & \text{si} \quad 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Sabemos que f es caótica sobre [0,1] (Devaney, 1989) y, en particular, f es transitiva.

Como $p = \dfrac{2}{3}$ es el único punto fijo de f y f([o,p]) = [0,1] ≠ [p,b] entonces, por *Lema 11*, obtenemos que f es una función mezclante sobre [0,1].

Así, por *Teorema 3*, obtenemos que $\bar{f}$ es mezclante sobre sobre K([0,1]) y, por lo tanto, transitiva sobre K([0,1]). Sin embargo, ahora mostraremos que $\bar{f}$ no es transitiva sobre K_c ([0,1]) y, para ello, recordemos primero que la distancia de Hausdorff entre intervalos viene dada por la fórmula

H({a,b]=max{a–c|, b–d|}.

Considere las bolas abiertas $B\left([0,1],\dfrac{1}{10}\right)$ y $B\left(\{0\},\dfrac{1}{10}\right)$ en el espacio (k_c ([0,1], H). Entonces, $K \in B\left([0,1],\dfrac{1}{10}\right)$ implica $\dfrac{2}{3} \in K$. Luego, $\dfrac{2}{3} \in \bar{f}^p(K)$ para todo natural $p \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si $G \in B\left(\{0\},\dfrac{1}{10}\right)$ entonces $G \subseteq \left[0,\dfrac{1}{10}\right]$, lo que implica que $H\left(\bar{f}^p(K),G\right) \ge \dfrac{17}{30}$ para todo $K \in G\left([0,1],\dfrac{1}{10}\right)$ y $G \in B\left(\{0\},\dfrac{1}{10}\right)$.

Por lo tanto

$\bar{f}^p\left(B\left([0,1],\dfrac{1}{10}\right)\right) \cap B\left(\{0\},\dfrac{1}{10}\right) = \varnothing$. para todo natural $p \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\bar{f}$ no es transitiva sobre K_c([0,1].

Ejemplo 3. Si consideramos la misma función del ejemplo anterior, tenemos que, como f es caótica sobre [0,1], entonces f posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre [0,1] y, por lo tanto, por el *Teorema 2* b), $\bar{f}$ también posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre K([0,1]. Sin embargo, probaremos ahora que $\bar{f}$ no posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre el subespacio K_c([0,1]. Para ver esto observemos que f

(1\3) = 2\3, que es el único punto fijo en (0,1).

Consideremos ahora la bola abierta V=B ([5\24,11\24], 1\8$\subseteq K_c$ ([0,1]) y elijamos un elemento arbitrario K = [a, b] $\in$ B ([5\24,11\24], 1\8).

Entonces $\left\{\left|a-\frac{5}{24}\right|,\left|b-\frac{11}{24}\right|\right\} < \frac{1}{8}$, de donde podemos concluir por una parte, que $a < \frac{1}{3} < b$, y por otra que $b < \frac{2}{3}$.

Es decir, $\frac{1}{3} \in K$, pero $\frac{2}{3} \notin K$. Así f (1\3) = 2\3 $\in$ f (K), lo que implica f (K)) $\neq$ K.

Así, vemos que $\frac{2}{3} \in f^{\rho}(K)$ y, por lo tanto, $f^{\rho}(K) \neq K$ para todo natural $\rho \in \mathbb{N}$.

Como K$\in$V es arbitrario, entonces concluimos que $\bar{f}$ no posee puntos periódicos en la bola V lo que implica que $\bar{f}$ no posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre Kc([0,1]).

Por lo tanto, cuando X=I es un intervalo, estos ejemplos anteriores nos muestran las importantes diferencias dinámicas que existen entre los sistemas (I, f), (Kc(I)) y (K(I)).

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una mirada la cual, aunque es ciertamente incompleta, al menos nos da luces respecto a algunos avances relevantes obtenidos en el estudio de las conexiones entre Dinámica Colectiva y Dinámica Individual sobre espacios métricos en los últimos años. Sabemos que aun quedan muchos problemas en abierto que esperan respuesta, en especial la de encontrar condiciones sobre $\bar{f}$ para que la densidad periódica de la extensión $\bar{f}$ sobre K(X) implique la densidad periódica de f sobre el espacio base X.

También existen 'extensiones intermedias' entre $\bar{f}$ y K(X) en donde la complejidad dinámica decrece fuertemente. Por ejemplo, Banks (2005) mostró que si C(X) es el subespacio de todos los subconjuntos compacto-conexos no vacíos de un espacio métrico X, siendo *X* un arco o una grafica, entonces $\bar{f}$ no puede ser transitiva sobre C(X), cualquiera sea la función continua f:X→X.

En la parte final de este trabajo hemos estudiado este último resultado en el contexto intervalar, es decir con X=I concluyendo que: a) $\bar{f}$ no es transitiva sobre $K_c(X)$, para toda función f:I→I continua; b) $\bar{f}$ no posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre $K_c(X)$, para la mayoría de las funciones continuas f:I→I; y c) $\bar{f}$ no es sensitiva sobre $K_c(X)$, para la mayoría de las funciones continuas $f: I \to I$.

Es decir, ya sabemos que sobre un intervalo I la complejidad dinámica de la extensión $\bar{f}$ a la clase de subconjuntos compacto-convexos $K_c(I)$ es menor que la complejidad de la dinámica sobre la extensión total a K(I), y también es menor que la complejidad de la dinámica de f sobre el espacio base I. Esto, a *grosso modo*, nos dice que el modelamiento matemático con parámetros intervalares debiera ser más predecible y/o el estudio de la evolución en el tiempo a partir de condiciones iniciales intervalares dadas debiera tener mejor predicción, lo cual podría ser muy útil en el modelamiento matemático de fenómenos reales con altos grados de incerteza en los parámetros que intervienen en el sistema.

Por último, a partir de lo observado por Banks *et al.* (2005) y Mendez Lango (2012) respecto a que la extensión $\bar{f}$ no puede ser transitiva sobre la clase $C_c(X)$ de subconjuntos compacto-conexos de un espacio métrico X (siendo X un arco o una gráfica), y en conexión con nuestro último *Teorema 10*, sería interesante estudiar las siguientes conjeturas:

C1) $\bar{f}$ no posee un conjunto denso de puntos periódicos sobre $C_c(X)$, para la mayoría de las funciones continuas $f: X \to X$.

C2) $\bar{f}$ no es sentitiva sobre $C_c(X)$, para la mayoría de las funciones continuas $f: X \to X$.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo contó con el apoyo financiero de CONICYT-Chile, otorgado a través de los proyectos FONDECYT Nº 1151159 y 1150292.

REFERENCIAS

Acosta G, Hernández-Gutiérrez R, Naghmouchi I, Oprocha P (2017) Periodic points and transitivity on dendrites. *Ergod. Theory Dynam. Syst. 37*: 2017-2033.

Banks J, Brooks J, Cairns G, David G, Stacey P (1992) On Devaney's Definition of Chaos. *Am. Math. Month. 99*: 332-334.

Banks J (2005) Chaos for induced hyperspace maps. *Chaos Solit. Fract. 25*: 681-685.

Bauer W, Sigmund K (1975) Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures. *Monatsh. Math. 79*: 81-92.

Cushing J, Costantino R, Dennis B, Desharnais R, Henson S (2003) *Chaos Ecology.* Vol. 1, *Experimental Nonlinear Dynamics*. Academic Press. Boston, MA, EEUU. 240 pp.

Devaney RL (1989) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesl. Redwood City, CA, EEUU. 360 pp.

Furstenberg H (1967) Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in Diophantine approximation. *Math. Syst. Theory 1*: 1-49.

Illanes A, Nadler SB (1999) *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances.* Dekker. New York, EEUU. 544 pp.

Klein E, Thompson A (1984) *Theory of Correspondences*. Wiley. New York, EEUU. 256 pp.

Kolyada S, Snoha. (1997) Some aspects of topological transitivity - a survey. *Grazer Math. Ber. 334*: 3-35.

Liao G, Ma X, Wang L (2007) Individual chaos implies collective chaos for weakly mixing discrete dynamical systems. *Chaos Solit. Fract. 12*: 604 608.

Lorenz E (1963) Nonderterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci. 20*: 130-148.

Méndez Lango H (2012) Dinámica colectiva. *Integración 30*: 25-45.

Peris A (2005) Set-valued discrete chaos. *Chaos Solit. Fract. 26*: 19-23.

Nadler SBJr (1978) *Hyperspaces of Sets: a Text with Research Questions*. Dekker. New York, EEUU. 707 pp.

Rojas-Medar M, BassaneziR, Román-Flores H (1999) A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications, *Fuzzy Sets Syst. 102*: 263-269.

Román-Flores H (2003) A note on transitivity in set-valued discrete systems. *Chaos Solit. Fract. 17*: 99-104.

Román-Flores H (2016) Dynamics of interval and fuzzy-interval extensions of interval functions, IV Congr. Bras. Sistemas Fuzzy. Campinas-SP, Brasil.

Román-Flores H, Chalco-Cano Y (2005) Robinson's chaos in set-valued discrete systems. *Chaos Solit. Fract. 25*: 33-42.

Román-Flores H, Chalco-Cano Y (2015) A note on dynamics of interval extensions of interval functions. En *Annu. Meet. North American Fuzzy Information Processing Society.* Redmond, WA, EEUU.

Román-Flores H, Chalco-Cano Y, Silva GN, Kupka J (2011) On turbulent, erratic and other dynamical properties of Zadeh's extensions. *Chaos. Solit. Fract. 44*: 990-994.

Sharma P, Nagar A (2010) Inducing sensitivity on hyperspaces. *Topol. Applic. 157*: 2052-2058.

Strogatz SH (2000) *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* Studies in Nonlinearity Series. Westview. Cambridge, MA, EEUU. 498 pp.

Subrahmonian Moothathu TK (2007) Stronger forms of sensitivity for dynamical systems. *Nonlinearity 20*: 2115-2126.

Turchin P (2003) *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*. Princeton University Press. Princeton, NJ, EEUU. 450 pp.

Vellekoop M, Berglund R (1994) On intervals, Transitivity = Chaos. *Am. Math. Month. 101*: 353-355.

Wang Y, Wei G, Campbell W (2009) Sensitive dependence on initial conditions between dynamical systems and their induced hyperspace dynamical systems. *Topol. Applic. 156*: 803-811.

SOME CONNECTIONS BETWEEN INDIVIDUAL AND COLLECTIVE DYNAMICS

Heriberto Román-Flores, Iván Aguirre-Cipe and Víctor Ayala

SUMMARY

The concepts of chaos and complex dynamics have been studied exhaustively during several decades, not only due to the intrinsic richness of this theory, but also due to its many applications for modeling and solving real life problems. When studying the evolution in time of a dynamical system, if we assume that this dynamic is given by a defined function f, which contains values in a space X, then for each x within X, its orbit under iteration x, f(x), $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... describes how the 'point' x moves within X via the dynamics induced by f. However, sometimes we need to know not only this individual dynamic, but also how a set of points moves in the space X (e.g., when studying migratory, demographic or epidemiological phenomena), which leads us to the analysis of collective dynamics problems. In this article we study some of the connections between individual and collective dynamics and, in this context, the fundamental questions we intend to answer are: What is the relationship between the dynamics of individual and collective movements? Does individual chaos or complex individual dynamics imply collective chaos or complex collective dynamics? And what about the reverse implication? Does it hold?

ALGUMAS CONEXÕES ENTRE DINÂMICA INDIVIDUAL E COLETIVA

Heriberto Román-Flores, Iván Aguirre-Cipe e Víctor Ayala

RESUMO

O conceito de caos ou dinâmica complexa tem sido exaustivamente estudado durante várias décadas, isto devido tanto pela riqueza intrínseca desta teoria como por suas diversas aplicações no modelamento e solução de problemas reais. Neste contexto, quando estudamos a evolução no tempo de um sistema dinâmico e assumimos que essa dinâmica é dada por uma certa função f definida e com valores sobre um certo espaço X então, para cada elemento x pertencente a X, sua órbita sob iteração x, f(x), $f^2(x)$, $f^3(x)$,... descreve como se move o **'***ponto***'** *x sobre o espaço X via a dinâmica induzida por f. Por outro lado, algumas vezes não é suficiente conhecer esta dinâmica individual, mas precisamos saber como se movem conjuntos de pontos no espaço base (por exemplo, no estudo de fenômenos migratórios, demográficos ou epidemiológicos), e isto nos leva à analise de problemas de dinâmica coletiva. Neste artigo estudamos algumas conexões entre dinâmica individual e dinâmica coletiva e, nesta direção, as perguntas fundamentais que tentamos responder são as seguintes: Qual é a relação entre a dinâmica do movimento individual e a dinâmica do movimento coletivo? Caos individual ou dinâmica individual complexa implica caos ou dinâmica coletiva complexa? E vice-versa?*