LA MAYORIZACIÓN DÉBIL COMO CARACTERÍSTICA DEL ENVEJECIMIENTO DE SISTEMAS

ÁLVARO CORTÍNEZ PONTONI

RESUMEN

El concepto de fiabilidad aplicado a un sistema, como puede ser una máquina o un equipo, es la probabilidad de que funcione correctamente, es decir, que realice la tarea para la cual está diseñado. A medida que pasa el tiempo, los componentes del sistema, por ejemplo, diferentes piezas que componen la máquina, se desgastan y, por lo tanto, se espera que tengan menos probabilidad de seguir funcionando. Decimos, entonces, que dichos componentes envejecen según el tiempo. También se podría decir que las componentes envejecen según otras escalas, por ejemplo el número de revoluciones por minuto de un dínamo. Desde la perspectiva clásica, el concepto de envejecimiento parte de las distribuciones de tasa de fallo creciente. Dichas distribuciones no tienen una extensión natural hacia sistemas con más de una componente. Desde el punto de vista bayesiano se suelen tratar los modelos clásicos como bayesianos, considerar el parámetro como variable aleatoria. El problema que surge es que si bien la distribución condicionada al parámetro puede presentar característica de envejecimiento, la distribución incondicionada (mixtura), no necesariamente la preserva. En este artículo se propone una conceptualización del envejecimiento a partir de las funciones Schur-cóncava débiles, las que toman en casos particulares las definiciones clásica y bayesiana.

Envejecimiento Clásico

La teoría clásica tiene diferentes formas de definir el envejecimiento. La más conocida se basa en la 'tasa de fallo'. Dada una variable aleatoria X, sea $\overline{F}_\theta(x) = P_\theta(X \geq x)$ su función de supervivencia o distribución de vida y $f_\theta(x)$ su densidad (que supondremos absolutamente continuas), donde θ es un parámetro perteneciente a un espacio paramétrico Θ. La fiabilidad condicional de una unidad a la edad t es la probabilidad de que dicha unidad viva un tiempo x, sabiendo que ya ha vivido un tiempo t (Barlow y Proschan, 1996):

$$\overline{F}_\theta(X/t) = \frac{P_\theta(X \geq t+x)}{P_\theta(X \geq t)} = \frac{\overline{F}_\theta(t+x)}{\overline{F}_\theta(t)}$$

para $\overline{F}_\theta(t) > 0$.

Por otra parte, la probabilidad condicional de fallo durante el siguiente intervalo de duración x de una unidad a la edad t es

$$F_\theta(x \mid t) = \frac{F_\theta(t+x) - F_\theta(t)}{\overline{F}_\theta(t)} = 1 - \overline{F}_\theta(x \mid t)$$

Así, podemos obtener la tasa de fallo condicional en el momento t:

$$r_\theta(t) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{F_\theta(t+x) - F_\theta(t)}{\overline{F}_\theta(t)}$$

$$= \frac{f_\theta(t)}{1 - F_\theta(t)}$$

para $F_\theta(t) < 1$.

Se suele llamar a esta expresión también 'tasa de riesgo'.

Definición

Una función de distribución univariante absolutamente continua $F_\theta(x)$ se dice que tiene tasa de fallo creciente (IFR) si $r_\theta(x)$ es creciente en $x \geq 0$. $F_\theta(x)$ es IFR si $\overline{F}_\theta(x \mid t)$ es creciente en $t \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

La teoría de las distribuciones IFR está ampliamente desarrollada en la literatura, por ejemplo en Basu (1975), Proschan (1975), Savits (1985), entre muchos otros.

A partir de lo anterior, se tiene la siguiente definición clásica de envejecimiento. Se basa en el hecho de que a medida que pasa el tiempo, hay

PALABRAS CLAVE / Envejecimiento de Sistemas / Funciones Schur / Mayorización / Mixturas /

Recibido: Recibido: 21/01/2014. Modificado: 30/10/2014. Aceptado: 03/11/2014.

Álvaro Cortínez Pontoni. Estadístico, Pontificia Universidad Católica de Chile. Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España. Profesor, Universidad de Tarapacá, Chile. Dirección: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Tarapacá. Avda. General Velásquez 1775, Arica, Chile. e-mail: acortinezp@uta.cl

más probabilidad de fallar, es decir, la probabilidad de supervivencia condicional decrece:

Definición

Una unidad se considera que envejece si su función de distribución $F_\theta(x)$ es IFR.

Existen, además, familias más generales de distribuciones, cuyas características también se suelen usar para definir el envejecimiento. Es así como surgen las clases de distribuciones de tasa de fallo medio creciente (IFRA), mejor nuevo que usado (NBU), mejor nuevo que usado en promedio (NBUE) y mejor nuevo que usado en promedio armónico (HNBUE) (ver, por ejemplo, Rolski (1975).

Por otra parte están las familias de distribuciones que presentan un mejoramiento durante su vida (un 'rejuvenecimiento'). Desde el punto de vista de tasa de fallo, éstas se consideran DFR, es decir de tasa de fallo decreciente. También están sus equivalentes desde las demás perspectivas: DFRA, NWU, NWUE, HNWUE.

Es sencillo comprobar que la distribución exponencial, con función de densidad dada por $f_\theta(x) = \theta \cdot e^{-\theta x}$ para $x \geq 0$ y $\theta \geq 0$, es de tasa de fallo constante, así como es constante en cada una de las otras clases de distribuciones.

La distribución exponencial define el no envejecimiento. Es decir, si el tiempo de vida de un sistema está definido en términos de una distribución exponencial, tendrá tasa de fallo constante, por lo tanto a medida que pase el tiempo no se desgastará, no envejecerá ni rejuvenecerá. Evidentemente, en cualquier sistema se espera que sí haya desgaste, sin embargo es útil considerar esta distribución, pues marca el límite entre entre 'estar peor' y 'estar mejor' en el tiempo. Si podemos definir un concepto basado en esta idea, habrá posibilidades de mejorar esta definición.

Por otra parte, si un sistema tiene más de un componente, lo más común, se debe buscar una distribución de probabilidades conjunta. Esto puede ser muy engorroso y existen diferentes autores que se han dedicado a obtener distribuciones conjuntas, basándose en ciertos supuestos o en distribuciones condicionales. Uno de los supuestos para construir dichos modelos se basa en la idea de independencia: los componentes son independientes entre sí, por lo tanto la distribución conjunta es el producto de las distribuciones de vida de cada uno de los componentes. Nótese la situación límite de exigir que los componentes sean independientes entre sí. Pero además añade un punto a estudiar: el hecho que una componente tenga cierto tipo de tasa de fallo, no necesariamente implica que el conjunto sea del mismo tipo. Esto es complicado porque nos encontramos con tres problemas, que aunque algebraicamente no son muy difíciles de resolver, en términos de coherencia puede dejar en duda toda la teoría de envejecimiento clásica: 1) para construir modelos de sistemas con múltiples componentes se deben hacer supuestos que por lo general son irreales (por ejemplo, la independencia); 2) no existe una única tasa de fallo para sistema con más de un componente; y 3) aunque todas las componentes tengan un cierto tipo de tasa de fallo, el sistema en conjunto no necesariamente preserva ese tipo de tasa de fallo. Por lo tanto, la teoría clásica no nos provee una definición aceptable ni coherente del envejecimiento de sistemas.

El Punto de Vista Bayesiano

Los modelos bayesianos suelen tomar los modelos clásicos y tratar el parámetro como variable aleatoria, para lo cual se le asigna una función de probabilidad propia. Dichos modelos deben ser, desde este punto de vista, coherentes, es decir que los tiempos de vida sigan cierta distribución de probabilidades conjunta.

Sea $F(x|\theta)$ la distribución bayesiana con densidad $f(x|\theta)$, ambos condicionados al parámetro bayesiano θ. Entonces, si

$$r(x\,|\,\theta) = \frac{f(x\,|\,\theta)}{1 - f(x\,|\,\theta)}$$

es creciente, $F(x|\theta)$ tendrá una tasa de fallo creciente (es IFR).

A partir de $F(x|\theta)$ se puede construir la distribución marginal o predictiva $F(x)$ combinando la distribución a priori con la distribución de vida bayesiana (función de verosimilitud):

$$F(x) = \int_\Theta F(x\,|\,\theta)\, d\pi(\theta)$$

Adoptar simplemente un concepto clásico puede acarrear precisamente un problema de coherencia desde el punto de vista bayesiano. Habría que esperar que la distribución incondicionada $F(x)$ fuera del mismo tipo de tasa de fallo que la condicionada $f(x\,|\,\theta), \forall\theta \in \Theta$. Sin embargo, esto no necesariamente se cumple.

Ejemplo

Para la distribución exponencial mencionada en el ejemplo anterior, la tasa de fallo condicional es constante (igual al parámetro θ), lo cual implica no envejecimiento.

Por otra parte, suponiendo que θ sigue una distribución gamma (su familia conjugada), de parámetros β y γ, se obtiene que la tasa de fallo incondicional es

$$r(x) = \frac{\gamma}{x + \beta}$$

lo cual es decreciente en x.

Por lo tanto, la mixtura de una verosimilitud exponencial y una a priori gamma es de tasa de fallo decreciente.

Desde el punto de vista bayesiano surge, entonces, un inconveniente para el concepto bayesiano adoptado del clásico. Es razonable que una característica que presenta la población dependa de sus individuos, ya sea condicionada o no a cierto parámetro o conjunto de parámetros. De más está seguir estudiando los modelos de este tipo para conjuntos multivariantes, pues se parte de la misma incoherencia que se tuvo en la teoría clásica añadiendo la surgida en la bayesiana.

Se hace necesario buscar una característica del envejecimiento que pueda superar los todos los inconvenientes hasta ahora encontrados. Barlow y Mendel (1992) proponen buscar esta caracterización basándose en el concepto de similaridad.

La Similaridad como Característica del Envejecimiento

Partamos de la base que un sistema tiene más de una componente, así es que hablaremos de vectores de tiempo de vida. Los tiempos de vida similares son tiempos de vida que tiene sentido comparar. Es útil para esto restringir los vectores de vida de dos poblaciones para hacerlos comparables.

Sean $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ los tiempos de vida de dos poblaciones de n unidades cada una.

El envejecimiento del sistema será estudiado en función del envejecimiento de los componentes. Por lo tanto, cada uno de los sistemas estará formado por n componentes, cuyos tiempos de vida serán comparados. Para ello se requiere una función de supervivencia conjunta, la que se obtiene sin necesariamente suponer independencia entre dichos componentes. A partir de esa función de supervivencia, se espera que la función predictiva (la mixtura) preserve la caracterización del envejecimiento. Gráficamente, la idea es

$$\left.\begin{array}{r} x_1, x_2, \ldots, x_n \to f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta\right) \\ \theta \to \pi(\theta) \end{array}\right\} m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Barlow y Mendel (1992) comparan los vectores de tiempo de vida respecto a la 'similaridad' usando el concepto de 'mayorización' (Marschall y Olkin, 1979; Chan *et al*., 1989; Pecaric *et al*., 1992).

Definición

Sean $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$ e $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \ldots \geq y_{(n)}$ las componentes en orden decreciente de los vectores X e Y, respectivamente. Se dice que X mayoriza a $Y\left(X \succ Y \text{ o bien } X >_m Y\right)$ si

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$
2. $\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Equivalentemente, se dice que $X \succ Y$ existe una matriz **P** doblemente estocástica tal que **P**X=Y.

El concepto de mayorización induce un preorden entre tiempos de vida. Si un vector de tiempos de vida mayoriza a otro, este último contiene tiempos de vida que son más cercanos entre sí, por lo tanto, representa unidades que son más 'similares'. Este orden es consistente con la distancia euclidiana sobre un símplex de vectores con el mismo valor medio, así como con otros órdenes.

El orden de mayorización puede servir, entonces, para comparar vectores de tiempos de vida similares. Se hace necesario, a continuación, buscar funciones que preservan este tipo de orden.

Definición

Una función f definida sobre R^n se dice Schur-convexa si $X \succ Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$ y es Schur-cóncava si $X \succ Y \Rightarrow f(X) \geq f(Y)$

Supondremos que $n \geq 2$, pues las funciones Schur sólo tienen sentido para argumentos vectoriales.

Marschall y Olkin proveen una forma simple de verificar Schur-concavidad:

Teorema

Sea $f: R^n \to R$ diferenciable y simétrica, entonces f es Schur-cóncava si y sólo si $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_{(i)}}$ es no decreciente en i = 1, 2, …, n.

Un criterio debido a Ostrowski (1952) afirma que f es Schur-cóncavo si y sólo si

$$\left(x_i - x_j\right)\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(X)}{\partial x_j}\right) \leq 0.$$

Las funciones que son o bien Schur-cóncavas o Schur-convexas se llaman simplemente funciones Schur (o que poseen la propiedad de Schur). Nótese que una función Schur necesariamente es invariante bajo permutaciones de sus elementos.

Barlow y Mendel observan que la caracterización del envejecimiento sugiere Schur-concavidad de la función de probabilidades f(X), o de la distribución de supervivencia $\overline{F}(X)$.

Es necesario volver a la idea del envejecimiento de sistemas. Barlow y Mendel, basándose en el concepto de las funciones Schur, concluyen que si las unidades {1, 2, …, n} envejecen en ese sentido, entonces

1. Los subconjuntos de {1, 2, …, n} también envejecen.
2. Los tiempos de vida son variables aleatorias intercambiables y, en particular, los tiempos de vida de un número infinito de dichas unidades lleva a un modelo de verosimilitud de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, condicionado a cierto parámetro θ apropiado.
3. Si el modelo de verosimilitud muestra envejecimiento, entonces lo mismo se tendrá con la densidad no condicionada f(X) (o distribución de supervivencia conjunta).
4. Los tiempos de vida de poblaciones finitas de unidades no son condicionalmente independientes.

La enumeración anterior nos permite, desde este punto de vista, redefinir el envejecimiento, ya que al elegir entre dos vectores de tiempos de vida, podemos apostar sobre la supervivencia de un vector de tiempos de vida sobre otro si el primero mayoriza al segundo. Entonces, Barlow y Mendel dan la siguiente definición:

Definición

Las unidades {1, 2, …, n} con tiempos de vida $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ envejecen, o se desgastan respecto al tiempo, si y sólo si su distribución de supervivencia conjunta $\overline{F}(X)$ es Schur-cóncava.

Utilizar el concepto de similaridad es muy razonable. Según esta idea, sólo tiene sentido comparar tiempos de vida que son comparables, por lo tanto deben ser similares. La preservación de la mayorización resulta como consecuencia inmediata. Si entramos a analizar por partes la definición de mayorización encontramos que, dados dos tiempos de vida, X e Y, el primero mayoriza al segundo si, después de ordenarlos, el primer tiempo de vida de X es mayor que el primero de Y, la suma de los dos primeros tiempos de vida de X es mayor que la suma de los dos primeros tiempos de vida de Y y así sucesivamente; pero, aún así, las sumas de los tiempos de vida de ambos vectores son iguales, es decir, en total ambos sistemas funcionan el mismo tiempo. Esto es muy útil para poder hablar de tiempos medios de vida, de modo que se pueda trabajar con el parámetro. Sin embargo, surge la duda respecto a lo real de este supuesto: que los tiempos de vida de ambos vectores sumen lo mismo. A continuación se relajará esta condición.

La Mayorización Débil

La definición dada por Barlow y Mendel puede ser tan restrictiva como la clásica. Mientras una requiere independencia para construir sus modelos, la otra requiere que las sumas de los tiempos de vida sean iguales para dos conjuntos de tiempos de vida. La clásica añade además la dificultad para generalizar las definiciones univariantes a sistemas con más de una componente. Será necesario buscar un concepto que no dependa ni de la independencia ni de la suma total de los tiempos de vida de dos vectores, además que sea fácilmente extendible a sistemas con múltiples componentes incluso a matrices de tiempos de vida.

Dos vectores de tiempos de vida se considerarán a partir de ahora comparables siempre que se refieran a los mismos sistemas, no importa del orden que sean. Un modelo debe ser igualmente válido para tiempos de vida similares como para tiempos de vida muy diferentes. Es razonable, entonces, eliminar el supuesto de las sumas de todos los tiempos de vida. Para ello, se utilizará la idea de mayorización débil (Marschall y Olkin):

Definición

Sean $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$ e $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq \ldots \geq y_{(n)}$ las componentes en orden decreciente de los vectores X e Y, respectivamente. Se dice que X mayoriza débilmente a $Y\left(X \succ_m Y\right)$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$$

para j= 1, 2, …, n.

Equivalentemente, se dice que $Y(X \succ_m Y)$ existe una matriz **P** doblemente subestocástica tal que **P**X=Y.

La mayorización débil se basa en el hecho de que una vez que ha fallado una pieza no necesariamente ha fallado todo el sistema (compuesto por n piezas) y podemos fijarnos en el segundo fallo y luego en el tercero y así sucesivamente, de modo que podamos comparar los tiempos de vida completos de dos sistemas. X mayoriza débilmente a Y si cada uno de los fallos ocurren antes en Y que en X.

Definición

Una función f definida sobre R^n se dice Schur-convexa débil si $X \succ_m Y \Rightarrow f(X) \geq f(Y)$ y es Schur-cóncava débil si $X \succ_m Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$

Al igual que las funciones Schur, las funciones Schur débiles sólo tienen sentido para argumentos vectoriales. Sin embargo no quedan descartados los casos univariantes.

El siguiente es un método también simple de identificar a las funciones Schur débiles.

Teorema

Si la función $f:R^n \rightarrow R$ es diferenciable, entonces es Schur-cóncava débil si y sólo si

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_{(1)}} \geq \frac{\partial f(X)}{\partial x_{(2)}} \geq \cdots \geq \frac{\partial f(X)}{\partial x_{(n)}} > 0.$$

Es decir, $\frac{\partial f(X)}{\partial x_{(i)}}$ es decreciente no negativo en i. La condición equivalente de Barlow y Mendel permite utilizar cualquier función f(X), que podría ser incluso negativa. En la práctica, casi seguro trabajaremos con funciones de densidad que son no negativas y no requeriremos la condición $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Para conservar el objetivo de esta conceptualización, desde el punto de vista de coherencia, es necesario centrarnos en la preservación bajo mixturas. Para eso se trabajará con el concepto de 'Mayorización Débil Estocástica'.

La Mayorización Débil Estocástica

Los tiempos de vida de los diferentes componentes de vectores son estocásticos. Por eso es razonable apoyarse precisamente en este hecho para caracterizar el envejecimiento. En primer lugar se definirá el orden estocástico:

Definición

X es menor o igual que Y en orden estocástico $(X \leq Y)$ si $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ para todas las funciones medibles f (X) crecientes para las cuales existen los valores esperados.

Nevius *et al*. (1977) aprovechan el orden estocástico para definir la mayorización débil:

Definición

X mayoriza débil estocásticamente a $Y(X \succ_w^{st} Y)$ si $f(X) \geq f(Y)$ para toda función Schur-convexa no decreciente Borel-medible sobre R^n.

En términos de de las funciones de distribución y de los vectores aleatorios, se tiene la siguiente definición, que será imprescindible en lo que sigue.

Definición

$F \succ_w^{st} G$ si $X \succ_w^{st} Y$, para las funciones de distribución F y G de X e Y, respectivamente.

Los siguientes teoremas se demuestran en Nevius *et al*. (1977):

Teorema

Sean $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ vectores aleatorios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $X \succ_w^{st} Y$;
2. $E[F(X)] \geq E[f(Y)]$ para toda función Schur-convexa f para la cual existen ambos valores esperados;
3. $E[F(X)] \geq E[f(Y)]$ para toda función Schur-convexa f acotada.

Los siguientes teoremas tienen como objetivo relacionar la mayorización débil con la mayorización débil estocástica y encaminarse así al teorema de preservación bajo mixturas, lo que nos permitirá dar una nueva definición del envejecimiento.

Teorema

Sean X e Y vectores aleatorios en R^n. Sean X* = TX e Y* = TY donde T es una aplicación decir $R^n \rightarrow R^n$, definida por $T(X) = (z_1, z_2, \dots, z3$, donde

$$z_i = \sum_{j=1}^{i} x_{(j)}, i = 1, 2, \dots, n$$

entonces, $X \succ_w^{st} Y$ si y solo si $X^* \succ_w^{st} Y^*$.

Como consecuencia inmediata de este teorema, obtenemos que si $X \succ_w^{st} Y$ entonces

$$\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} \geq st \sum_{j=1}^{i} y_{(j)}$$

para i = 1, 2, …, n.

Teorema

Si $X \succ_w^{st} Y$ y $Z \succ W$, siendo X y Z independientes así como Y y W entonces $X^* + Y^* \succ_w^{st} Y^* + W^*$.

También en Nevius *et al*. (1977) se demuestra el siguiente teorema, que relaciona la mayorización débil sobre los parámetros con la mayorización débil estocástica de las funciones de densidad condicionadas. Para eso se exige que la función de densidad conjunta $f(X,\theta)$ satisfaga la propiedad de semigrupo:

Teorema

Sea $f(X,\theta)$ totalmente positiva de orden 2 en $\theta>0$ y $x>0$. Sea $X|\theta=\{X|\theta_1, X|\theta_2, \dots, X|\theta_n\}$ un vector aleatorio de componentes independientes, cada una con densidad $f(X,\theta)$. Si $\theta \succ_w \theta'$ entonces $f(X|\theta) \succ_w^{st} f(X|\theta')$.

Los teoremas anteriores proveen de los elementos necesarios para poder caracterizar el envejecimiento en función de la coherencia, de modo que si la característica está presente en la densidad condicionada a un parámetro, también lo estará en la densidad no condicionada (su mixtura).

Teorema de Preservación de la Mayorización Débil Estocástica Bajo Mixturas

Sea $\{X|\theta\}$ una familia de vectores aleatorios dependientes de Θ, de modo que $\theta \succ_w \theta' \Rightarrow X|\theta \succ_w^{st} X|\theta'$.

Sean $\pi(\theta)$ y $\pi'(\theta)$ distribuciones a priori del vector de parámetros θ, tal que $\pi(\theta) \succ_w^{st} \pi'(\theta)$.

Sean las mixturas

$$f(X) = \int_{\Theta} f(X|\theta) d\pi(\theta)$$

y

$$f'(X) = \int_{\Theta} f(X|\theta') d\pi(\theta)$$

entonces

$$f(X) \succ_w^{st} f'(X)$$

Demostración

Sea f(X|θ) una función Schur-cóncava de X|θ. Por teorema de equivalencia anterior, se tiene que

$$\theta \succ_{w} \theta' \Rightarrow X\,|\,\theta \succ_{w}^{st} X\,|\,\theta'$$
$$\Rightarrow E\left[f\left(X\,|\,\theta\right)\right] \geq E\left[f\left(X\,|\,\theta'\right)\right]$$

$E\left[f\left(X\,|\,\theta\right)\right]$ es una función Schur-cóncava dependiente de θ. Por el mismo teorema anterior,

$$\pi\left(\theta\right) \succ_{w}^{st} \pi'\left(\theta\right) \Rightarrow E\left[f\left(X\,|\,\theta\right) \geq E\ f\left(X\,|\,\theta'\right)\right]$$
$$\Rightarrow \int_{\Theta} f\left(X\,|\,\theta\right) d\pi\left(\theta\right) \succ_{w}^{st} \int_{\Theta} f\left(X\,|\,\theta\right) d\pi'\left(\theta\right)$$
$$\Rightarrow f\left(X\right) \succ_{w}^{st} f'\left(X\right)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

El Teorema de Preservación permite formalizar una nueva caracterización del envejecimiento de sistemas:

Definición

Las unidades de tiempos de vida X={x_1, x_2, …, X_n} envejecen según el tiempo si su función de densidad es Schur-cóncava débil, es decir si f(X) preserva el orden de mayorización débil estocástica.

Observación

Los componentes no necesariamente son independientes, por lo que la verosimilitud no se basa en este hecho. Pero sí se exige que sean intercambiables entre sí. Por lo tanto, dicha verosimilitud consiste en un modelo de distribución conjunta del sistema en base a los componentes.

Ejemplo

Sistema de dos componentes dependientes entre sí, tal que cada uno de ellos es exponencial. Existen en bibliografía innumerables modelos exponenciales bivariantes. En particular, puede ser interesante estudiar el caso dado por la siguiente función de densidad:

$$f\left(x,y\right)=\frac{\theta_1+\theta_2}{1+\alpha}e^{\left\{-\theta_1 x-\theta_2 y\right\}}$$
$$x\left[1+\alpha\left(2e^{-\theta_1 x}-1\right)\left(2e^{-\theta_2 y}-1\right)\right]$$

para $x,y>0$ y donde, marginalmente, X~exp(θ_1); Y~exp(θ_2) y $-1\leq\alpha\leq1$.

Sin perder el objetivo del ejemplo y para conseguir una mejor visualización de los resultados, supondremos que $\theta_1 = \theta_2 = 1$:

$$f\left(x,y\right)=e^{\left\{-x-y\right\}}\left[1+\alpha\left(2e^{-x}-1\right)\left(2e^{-y}-1\right)\right]$$

para x, y>0, $-1\leq\alpha\leq1$.

Su función de supervivencia está dada por $\overline{F}\left(x,y\right)=e^{-x-y}$ $x\left[1+\alpha\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right)\right]$.

Cada una de las componentes presenta ‘no envejecimiento’ desde el punto de vista clásico, al tener tasas de fallo constante. Sin embargo, la tasa de fallo bivariante para el sistema no es constante:

$$r\left(x,y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{\overline{F}\left(x,y\right)}=\frac{1+\alpha\left(2e^{-x}-1\right)\left(2e^{-y}-1\right)}{1+\alpha\left(1e^{-x}\right)\left(2e^{-y}\right)}$$

Esta tasa de fallo no es constante; de hecho tiene zonas de crecimiento y decrecimiento, lo cual muestra incoherencia con el hecho de que cada una de sus componentes sí lo hayan sido.

Para comprobar si es Schur-cóncava débil se requiere calcular previamente:

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=-e^{-x-y}\left[1+\alpha\left(2e^{-x}-1\right)\left(2e^{-y}-1\right)\right]$$
$$+e^{-x-y}\left[-2\alpha e^{-x}\left(2e^{-y}-1\right)\right]$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=-e^{-x-y}\left[1+\alpha\left(2e^{-x}-1\right)\left(2e^{-y}-1\right)\right]$$
$$+e^{-x-y}\left[-2\alpha e^{-y}\left(2e^{-x}-1\right)\right]$$

y se puede comprobar que si $x \geq y$, entonces $\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\leq\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}$, por lo que es Schur-cóncava débil, que preserva el orden de mayorización débil, preservando la característica de envejecimiento de los modelos marginales univariantes al modelo bivariante, con variables dependientes.

Conclusiones

Para poder caracterizar el envejecimiento de sistemas, es necesario requerir coherencia, es decir, que los componentes que presentan la característica, condicionados a un cierto parámetro, la preserven bajo mixturas. La noción clásica de envejecimiento, por su parte, es muy limitada, pues sólo es válida para sistemas con una componente y, a la hora de extenderse a sistemas multivariantes, se pierde la coherencia.

Definir el envejecimiento a partir de densidades Schur-cóncava débiles permite respetar la coherencia. Además, se puede observar que si las unidades {x_1, x_2, …, x_n} envejecen en este sentido, entonces

- Todos sus subconjuntos también envejecen.
- Los tiempos de vida son variables aleatorias intercambiables y, en particular, los tiempos de vida de un número infinito de dichas unidades lleva a un modelo de verosimilitud de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (Teorema de De Finetti).
- Si el modelo de verosimilitud muestra envejecimiento, entonces lo mismo se tendrá con la densidad no condicionada distribución de supervivencia conjunta.
- Los tiempos de vida de poblaciones finitas de unidades no son necesariamente independientes, por lo que no deben modelarse como tales.
- La propuesta de Barlow y Mendel (1992) surge como un caso particular.

REFERENCIAS

Barlow RE, Mendel MB (1992) De Finetti-type representations for life time distributions. *J. Am. Stat. Assoc. 87*: 1116-1122.

Barlow RE, Proschan F (1996) *Mathematical Theory of Reliability.* SIAM, Philadelphia, EEUU. Vol. 17. pp. 9-35.

Basu AP, Block HW (1975) On characterizing univariate and multivariate exponential distributions with applications. En Patil GP, Kotz S, Ord JK (Eds.) *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol. 3. Reidel. Boston, MA, EEUU. pp. 399-422.

Chan W, Park DH, Proschan F (1989) Peakedness of weighted averages of jointly distributed random variables. En Gleser LJ, Perlman MD, Press SJ, Sampson AR (Eds.) *Contributions to Probability and Statistics: Essay in Honor of Ingram Olkin*. Springer. Neva York, EEUU. pp. 58-62.

Marshall AW, Olkin I (1979) *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press. Nueva York, EEUU. pp. 3-28.

Nevius SE, Proschan F, Sethuraman J (1977) Schur functions in statistics: II. Stochastic majorization. *Ann. Stat. 5*: 263-273.

Ostrowski A (1952) Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur, *J. Math. Pures Appl. 31*: 253-292.

Pecaric JE (1992) On some classical inequalities in unitary spaces, *Mat. Bilten 16*: 63-72.

Proschan F (1975) Applications of majorization and Schur functions in reliability and life testing. In Barlow RE, Fussell JB, Singpurwalla ND (Eds.) *Reliability and Fault Tree Analysis*. SIAM. Filadelfia, EEUU. pp. 237-258.

Rolski T (1975) Mean residual life. *Z. Wahrsch. Verw. Geb. 33*: 714-718.

Savits TH (1985) A multivariate IFR distribution. *J. Appl. Prob. 22*: 197-204.

WEAK MAJORIZATION AS A CHARACTERISTIC OF SYSTEMS AGING

Álvaro Cortínez Pontoni

SUMMARY

Reliability applied to a system, like a machine or an equipment, is the probability that it works correctly, meaning that it performs the task for which it was designed in a satisfactory manner. As time passes, the components of the system, such as different pieces that make up the machine, will wear out and, therefore, are expected to be less likely to continue working. We say, then, that these components are aging along time. It also could be said that the components age according to other scales, such as the number of revolutions per minute of a dynamo. From the point of view of the classical theory, the concept of aging stems from increasing failure rate distributions. These distributions, however, do not have a natural extension to multivariate systems. On the other hand, Bayesians basically uses the classical notion and treat the parameters as random variables. The problem that arises is that although models conditioned to some parameter show an aging characteristic, it is not valid for unconditional models (mixtures). In this paper, a conceptualization of aging is proposed based on the weak Schur-concave functions, which in particular cases can be derived to the classical and Bayesian definitions.

A MAIORIZAÇÃO FRACA COMO CARACTERÍSTICA DO ENVELHECIMENTO DE SISTEMAS

Álvaro Cortínez Pontoni

RESUMO

O conceito de fiabilidade aplicado a um sistema, como pode ser uma máquina ou um equipamento, é a probabilidade de que funcione corretamente, quer dizer, que realize a tarefa para a qual está desenhado. Na medida em que passa o tempo, os componentes do sistema, como podem ser, por exemplo, diferentes peças que compõem a máquina, se desgastam e, portanto, se espera que tenham menos probabilidade de continuar funcionando. Dizemos, então, que ditos componentes envelhecem segundo o tempo. Também se poderia dizer que os componentes envelhecem segundo outras escalas, como pode ser o número de revoluções por minuto de um dínamo. Desde a perspectiva clássica, o conceito de envelhecimento parte das distribuições da taxa de falha crescente. Ditas distribuições não tem uma extensão natural para sistemas com mais de um componente. Desde o ponto de vista bayesiano é comum tratar os modelos clássicos como bayesianos, ao tratar o parâmetro como variável aleatória. O problema que surge é que, embora a distribuição condicionada ao parâmetro possa apresentar característica de envelhecimento, a distribuição incondicionada (mixtura), não necessariamente a preserva. Neste artigo se propõe uma conceitualização do envelhecimento a partir das funções Schur-côncava fraca, as quais tomam em casos particulares as definições clássica e bayesiana.