

---

# Score test DE RAO PARA EL COEFICIENTE DE SOLAPAMIENTO EN UN DISEÑO CENTRAL COMPUESTO

AQUILES DARGHAN CONTRERAS, SURENDRA PRASAD SINHA y ENILSA MADARIAGA SUAREZ

---

## RESUMEN

Se presenta y desarrolla una aplicación del score test de Rao para el coeficiente de solapamiento en el modelo de Draper y Guttman utilizando la superficie de respuesta generada por el diseño central compuesto. El test score de Rao para solapamiento hace uso de la teoría asociada a los operadores de proyección perpendicular y puede aplicarse con diferentes patrones de vecindad de una siembra siempre y cuando se considere al vecino más cercano como la unidad experimental directamente afectada por los tratamientos. La ilustración para la aplicación del test se desarrolló en el cultivo de le-

chuga sembrada a una densidad usual, la cual fue utilizada para definir el patrón de vecindad y la matriz de pesos asociada, para el cual no se encontró el efecto de solapamiento desde el punto de vista estadístico. El método es fácil de implementar y puede aplicarse en el campo de la agronomía o en temas afines con otras áreas, tal como en el manejo de pastos y forrajes en la producción animal y veterinaria, así como en el área de la educación cuando se evalúan las modalidades de enseñanza vinculadas a las tecnologías de información y comunicación.

En muchos experimentos agropecuarios, especialmente los que se conducen fuera de ambientes controlados como invernaderos, la aplicación de un tratamiento sobre una unidad experimental algunas veces pudiera afectar la respuesta en las unidades experimentales vecinas; es decir, podría presentarse un solapamiento mutuo en el uso de los tratamientos, por ejemplo, en ensayos para probar variedades vegetales el efecto de la vecindad puede manifestarse por diferencias morfológicas entre plantas o por diferencias en las fechas de germinación. Los tratamientos aplicados a los cultivos, tales como planes de fertilización, riego,

pesticidas, uso de controladores biológicos, agentes inoculantes, entre otros, pudieran dispersarse a las parcelas o unidades experimentales adyacentes, con lo cual puede afectarse la variable respuesta que está siendo medida en un momento dado. Ejemplos de estas situaciones pueden leerse en Bhalli *et al.* (1964) y en Hide y Read (1990).

El fenómeno de solapamiento ha sido modelado por varios investigadores. Por ejemplo, Pearce (1957) consideró un modelo donde cada tratamiento tiene un efecto directo en la parcela en la cual es aplicado y un efecto de traslapo sobre las parcelas vecinas. Draper y Guttman (1980) estudiaron el solapamiento en

superficies de respuesta, específicamente cuando se considera al vecino más próximo (horizontal, vertical o diagonal) como la fuente del traslapo, además, discutieron algunos métodos de prueba aproximados para el coeficiente de solapamiento y usaron el modelo no lineal

$$y = X\beta + \alpha WX\beta + \varepsilon \quad (1)$$

donde  $y$ : vector aleatorio asociado a la variable respuesta el cual consta de  $n$  filas ( $n$  unidades experimentales);  $X$ : matriz de diseño de la superficie, cuya dimensión viene dada por las unidades experimentales ( $n$ ) y los parámetros involucrados en el modelo de superficies de respuesta ( $p$ );

---

**PALABRAS CLAVE / Diseño Central Compuesto / Operador de Proyección Perpendicular / Solapamiento / Score Test /**

Recibido: 30/08/2014. Modificado: 28/02/2015. Aceptado: 02/03/2015.

**Aquiles E. Darghan Contreras.** Doctor en Estadística, Universidad de los Andes (ULA), Venezuela. Profesor, Universidad Nacional de Colombia (UNAL). Dirección: Facultad de Agronomía, UNAL. Bogotá, Colombia. e-mail: aqedarghanco@unal.edu.co

**Surendra Prasad Sinha.** Doctor en Estadística, Oregon State University, EEUU. Profesor, ULA, Venezuela. e-mail: sinha@ula.ve

**Enilsa Madariaga Suarez.** Doctora en Administración de Empresas, Universidad de León, España. Profesora, Universidad de Pamplona, Colombia. e-mail: ermadariaga8@misena.edu.co

---

$\beta$ : vector de parámetros desconocidos, es decir, los efectos a considerar en el modelo de segundo, el cual involucrará a los efectos principales, los efectos cuadráticos puros y los efectos cuadráticos mixtos;  $\alpha$ : efecto desconocido del traslapo;  $\mathbf{W}=(w_{ij})$ : matriz de pesos conocida de dimensión  $n \times n$ , donde  $w_{ij}$ : efecto de la unidad  $j$  sobre la unidad  $i$   $\sum_{j=1}^n w_{ij}=1$  para toda  $i$  y  $w_{ii}=0$ ,  $w_{ij} \geq 0$  para toda  $i, j$ ; y finalmente, para el vector de errores  $\varepsilon$  se asume distribución normal e independencia con esperanza cero ( $E(\varepsilon)=0$ ) y varianza  $\sigma^2 \mathbf{I}_n$ , donde  $\mathbf{I}_n$ : matriz de identidad de dimensión  $n \times n$  (Shukla y Subrahmanyam, 1999).

La naturaleza general de  $\mathbf{W}$  permite asignar pesos apropiados de consideraciones *a priori* sobre patrones de siembra, por lo cual es preciso señalar el patrón de vecindad en la siembra para poder construir apropiadamente la matriz. Los pesos se asignan con base a las distancias de siembra, por lo que a mayor distancia entre plantas es menor el valor del peso asociado.

El ejemplo de ilustración se desarrolló en cultivo de lechuga (*Lactuca sativa*) usando tres factores vinculados a la fertilización según el plan de la unidad de producción y como unidad experimental cada planta, estableciendo una densidad de siembra generada por una separación de 30cm entre plantas y 40cm entre hileras. Bajo estas condiciones, y con la hipótesis nula asociada a la ausencia de solapamiento, el valor del test en el diseño central compuesto ortogonal y rotatable con tres factores y nueve puntos centrales resultó ser  $S_3=2,88$  que comparado con la distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad para un nivel de significación del 5% llevó a la decisión de no rechazar la hipótesis nula de 'no solapamiento' entre las unidades vecinas más cercanas, atribuye a los tratamientos de fertilización y para la densidad de siembra establecida.

En las siguientes secciones se consideran por separado los aspectos teóricos que formaron parte del material documental necesario para el desarrollo del test y se describe el método fundamental para obtener el *Test Score* de Rao para el coeficiente de solapamiento en el modelo de superficie de respuesta generada por el diseño central compuesto.

## Metodología

El modelado del solapamiento se ha extendido de modelos de diseño (Darghan, 2010; Darghan *et al.*, 2014) a modelos de superficies de respuesta, habiendo desarrollado el test en este último caso en Darghan *et al.*

(2011). La importancia que poseen algunos modelos de superficies de respuesta en el área de la agronomía junto al propio concepto de solapamiento en el diseño experimental siguen promoviendo investigaciones que involucran no solo el uso de cultivos diferentes, además, el uso de modelos lineales en cada una de sus modalidades (Graybill, 1976). El diseño central compuesto sigue siendo una metodología de amplia aplicabilidad en las ciencias agrícolas y afines, tal como se evidencia en Liu *et al.* (2009), razón por la que a continuación se describe el diseño y se vincula el test de solapamiento a este diseño.

### El diseño central compuesto

La metodología de superficies de respuesta (MSR) fue desarrollada por Box y Wilson (1951) y es discutida en numerosos artículos y libros. Box (1954) enfatizó las bases de la MSR y la ilustró claramente en una variedad de aplicaciones. En los textos de Cochran y Cox (1957) y de Box *et al.* (2005) se dedica un capítulo entero al estudio de la MSR. Otros textos que tratan la MSR son Myers y Montgomery (1995) y Khuri y Cornell (1996).

Una de las etapas del estudio de una superficie de respuesta involucra la selección del diseño experimental, entre los cuales son conocidos aquellos que permiten la estimación de los parámetros en modelos de primer y segundo orden. En los modelos de segundo orden son conocidos el diseño factorial  $3^k$ , el diseño de Box-Behnken, el diseño central compuesto, el diseño equirradial, el diseño rotatable cilíndricamente, el diseño saturado de Box-Draper y otros, aunque en esta ocasión se hará una aplicación en el diseño central compuesto. Para mayor información en los otros diseños, ver el texto de Khuri y Cornell (1996).

La MSR es un conjunto de técnicas que se aplican antes, mientras y después de realizado un análisis de regresión habiendo el investigador previamente diseñado el experimento; una vez hecho el análisis de regresión se ejecutan una serie de pruebas al modelo y se aplican algunas técnicas de optimización con el fin de ganar mayor entendimiento de las características del sistema de respuestas bajo estudio. La metodología usa la estimación mínimo cuadrática o máximo-verosímil para obtener los coeficientes del modelo de regresión. Si se asume que el número de observaciones en la variable respuesta es mayor que el número de factores involucrados y si el modelo de segundo orden se escribe matricialmente como

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \quad (2)$$

siendo el modelo de la Ec. 2 aquel dado en la Ec. 1 bajo la restricción de la hipótesis nula asociada a la ausencia de solapamiento, es decir,  $H_0: \alpha=0$ . La Ec. 2 es el modelo lineal general usual, del cual se obtienen por estimación mínimo-cuadrática los estimadores para  $\beta$  y  $\sigma^2$ , dados por

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}; \hat{\sigma}^2 = (n-p)^{-1} \mathbf{y}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x) \mathbf{y} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{M}_x = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ : matriz de proyección perpendicular sobre el espacio de columnas de  $\mathbf{X}$ , denotado como  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$  y el superíndice T solo indica al operador de trasposición. La varianza del error en Ec. 3 es un estimador no sesgado, el cual difiere del estimador máximo-verosímil que viene dado por

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \mathbf{y}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x) \mathbf{y} = n^{-1} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x) \mathbf{y} \right\|^2 \quad (4)$$

Cabe resaltar que la naturaleza de la matriz  $\mathbf{X}$  en un modelo de superficie de respuesta no es de la misma que la de la matriz  $\mathbf{X}$  en el modelo de la Ec. 1, la que pertenece a un modelo de diseño del grupo de modelos cualitativos y consiste de ceros y unos solamente, siendo esencialmente una matriz indicadora. Por su parte, la matriz  $\mathbf{X}$  en un modelo de superficie de respuesta pertenece al modelo de regresión lineal del grupo de modelos cuantitativos y toma los valores de las variables independientes involucradas en el estudio, que en el caso de una superficie de respuesta de segundo orden toman los valores de 1 y -1 en variables codificadas (Graybill, 1976).

Entre los modelos de segundo orden suele destacarse el diseño central compuesto (DCC), pues un gran número de investigadores utilizan este diseño para desarrollar productos de aplicación agronómica o simplemente para optimizar procesos asociados a mejorar el rendimiento de los mismos, tales son los casos del desarrollo de néctar de mora pasteurizado (Millán *et al.*, 2003), de inoculantes de *Bradyrhizobium japonicum* (Cliquet *et al.*, 1992), el estudio de los factores asociados al índice de área foliar como un parámetro de interés en la mejora del rendimiento de un cultivo (Liu *et al.*, 2009), la optimización de la producción de ácido cítrico (Alam *et al.*, 2008), y la optimización de los procesos cromatográficos (Li *et al.*, 2008), entre otras aplicaciones.

El DCC, desarrollado por Box y Wilson (1951), consiste de una porción factorial con niveles de los

factores codificados con -1 ó 1, una porción axial con dos corridas sobre los ejes de cada variable de diseño a una distancia  $\delta$  del centro del diseño y  $n_0$  puntos centrales, lo cual genera un número total de puntos de diseño dados por  $N=2^k+2k+n_0$ .

El DCC puede poseer propiedades tales como rotabilidad, ortogonalidad y precisión uniforme, las cuales dependerán del número de puntos centrales, el número de puntos en la porción factorial  $f$  y del valor  $\delta$  en la porción axial. Por ejemplo, para rotabilidad se requiere que  $\delta=f^{1/4}$ , para alcanzar ortogonalidad se requiere que  $\delta=\left(0,5\left(\left(fN\right)^{1/2}-f\right)\right)^{1/2}$  y para

ortogonalidad como rotabilidad se requiere que  $n_0 \cong 4f^{1/2} + 4 - 2k$ . Para un mayor entendimiento y aplicabilidad de estas propiedades, ver el capítulo 4 del libro de Khuri y Cornell (1996).

La forma de la matriz  $\mathbf{X}$  en un diseño central compuesto ortogonal y rotatable de  $k$  factores queda como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{dx1} & \mathbf{X}_{dx1} \\ \mathbf{J}_{n_0x1} & \mathbf{0}_{n_0x1} \end{bmatrix}$$

con  $\mathbf{J}_*$  como un vector columna de dimensión dada por la expresión que ocupa el lugar del asterisco,  $d$  representa el número de puntos de diseño en la porción factorial y axial,  $\mathbf{X}_{dx1}$  es la submatriz de diseño de la porción factorial y axial sin el intercepto y  $\mathbf{0}_{n_0x1}$  es una matriz nula con  $n_0$  filas y  $t$  columnas, que en el caso de tres factores ( $k=3$ ) se tiene que  $t=(k^2+3k)/2=9$ ,  $f=8$ ,  $\delta=1,682$  y  $n_0=9$ .

#### Test score de Rao en el modelo de solapamiento

En Rao (1948) se introdujo el principio fundamental de prueba basado en la función de *score* como un método alternativo y con mejores propiedades que el de la razón de la verosimilitud y el método de Wald (Chandra y Mukerjee, 1985). El desarrollo del método comienza con la definición de la función logaritmo de la verosimilitud  $l(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  para un vector de parámetros  $p$ -dimensional  $\boldsymbol{\theta}$  dada una muestra  $\mathbf{y}$ . La función del vector  $p$ -dimensional

$$s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \partial l(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \quad (6)$$

es conocida como la 'función de *score*'. Para un dado  $\boldsymbol{\theta}$  y una variable aleatoria  $\mathbf{y}$  tenemos que

$$E_{\boldsymbol{\theta}} [s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})] = \mathbf{0} \text{ y } Cov [s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})] = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$$

donde  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$  es la matriz de información de Fisher.

Para probar la hipótesis nula  $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ , el estadístico de Rao viene dado por

$$S_s = s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0), \quad (7)$$

asumiendo que  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_0)$  es definida positiva. Bajo  $H_0$  este estadístico tiene distribución asintótica  $\chi^2$  central con  $p$  grados de libertad bajo condiciones generales (Maddala *et al.*, 1993).

En la Ec. 1 se asumió que  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  y que las hipótesis a contrastar son

$$H_0: \alpha = 0 \text{ contra } H_a: \alpha \neq 0, \quad (8)$$

de modo que bajo  $H_0$  la Ec. 1 se reduce a la Ec. 2, la cual representa al modelo lineal general usual sin solapamiento.

El logaritmo de la verosimilitud para la Ec. 1 se escribe como

$$l(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \alpha \mathbf{W}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2, \quad (9)$$

de la cual los estimadores máximo-verosímiles de  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\sigma^2$  con  $\alpha=0$  vienen dados respectivamente por las expresiones dadas en las Ecs. 3 y 5.

Sea  $s_{\alpha}(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \partial l(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) / \partial \alpha$  el componente del vector score correspondiente al parámetro de interés ( $\alpha$ ) y sea

$$\mathbf{F}(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \begin{bmatrix} F_{\alpha} & F_{12} \\ F_{12}^T & F_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz de información esperada, particionada de modo que  $F_{\alpha}$  se corresponda con la segunda derivada parcial con respecto al parámetro  $\alpha$ , y  $F_{12}$ ,  $F_{22}$ , y  $F_{12}^T$  se correspondan con las derivadas parciales con respecto a los parámetros de ruido ( $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ ) en las particiones respectivas. Para construir la prueba se requiere de la submatriz de  $F_{\alpha}^{-1}$  correspondiente a  $F_{\alpha}$ . El estadístico *score* para probar  $\alpha=0$  viene dado por

$$S_s = s_{\alpha}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2)^T \mathbf{F}_{\alpha}^{-1}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) s_{\alpha}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) \quad (10)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  y  $\hat{\sigma}^2$  son los estimadores máximo-verosímiles de ( $\boldsymbol{\beta}, \sigma^2$ ) cuando  $\alpha=0$ .

La función de *score* asociada al parámetro de interés y ya evaluada en  $(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2)$  viene dada por

$$S_{\alpha}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{\mathbf{H}}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x) \mathbf{y} \quad (11)$$

$$\text{con } \hat{\mathbf{H}}^T = \mathbf{y}^T \mathbf{M}_x \mathbf{W}^T \text{ y } \mathbf{M}_x = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T.$$

A continuación, la inversa de la matriz de información esperada  $\mathbf{F}_{\alpha}^{-1}$  asociada al parámetro de solapamiento y ya evaluada en  $(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2)$  viene dada por

$$\mathbf{F}_{\alpha}^{-1}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\|\hat{\mathbf{H}}\|^4} \left( \|\hat{\mathbf{H}}\|^2 + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{\mathbf{H}}} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}} \right) \quad (12)$$

con  $\hat{\mathbf{Q}}_{\hat{\mathbf{H}}} = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{H}}}$ , siendo  $\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{H}}} = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{H}}^T / \|\hat{\mathbf{H}}\|^2$  el operador de proyección perpendicular sobre el espacio columna de  $\hat{\mathbf{H}}$  y  $\mathbf{X}$  la matriz asociada al diseño central compuesto. Finalmente, el test de solapamiento queda expresado como

$$S_s = \frac{n \left( \|\hat{\mathbf{H}}\|^2 + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{\mathbf{H}}} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{H}} \right) \|\hat{\mathbf{H}}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x) \mathbf{y}\|^2}{\|\hat{\mathbf{H}}\|^4 \|\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_x\| \|\mathbf{y}\|^2} \quad (13)$$

el cual tiene distribución  $\chi^2$  con 1 grado de libertad, correspondiente a la dimensión del coeficiente de solapamiento en el modelo de Draper y Guttman.

#### Desarrollo de la matriz de pesos

Para implementar en una aplicación el test de Rao para solapamiento es preciso definir el patrón de vecindad en la siembra con el fin de construir la matriz de pesos  $\chi^2$ . Trabajando con una siembra en hileras para un cultivo donde se tiene un peso entre plantas y uno diferente entre hileras proporcional a las distancias de siembra, y asumiendo que solo el vecino más cercano (horizontal (h), vertical (v) y diagonal (d)) puede ser la unidad experimental directamente afectada, se generaron los modelos de vecindad que se muestran en la Figura 1.

Los pesos en cada patrón de la Figura 1 se obtuvieron a partir de

- $w_h + w_v + w_d = 1$ , de modo que  $\frac{w}{0,4} + \frac{2w}{0,3} + \frac{2w}{0,5} = 1$ , con lo que  $w_h = \frac{15}{47}, w_v = \frac{20}{47}, w_d = \frac{12}{47}$ .
- $w_h + 2w_v + 2w_d = 1$ , de modo que  $\frac{w}{0,4} + \frac{2w}{0,3} + \frac{2w}{0,5} = 1$ , así que  $w_h = \frac{15}{79}, w_v = \frac{20}{79}, w_d = \frac{12}{79}$ .

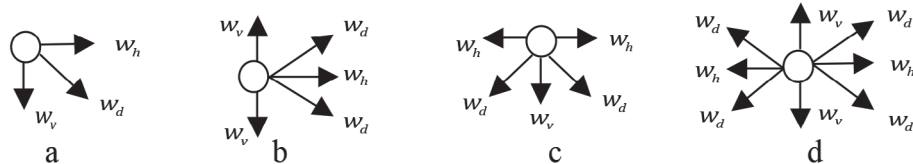


Figura 1. Modelos de vecindad para el cálculo de los pesos en el patrón de siembra en hileras

c)  $2w_h + w_v + 2w_d = 1$ , de modo que  $\frac{2w}{0,4} + \frac{w}{0,3} + \frac{2w}{0,5} = 1$ , así que  $w_h = \frac{15}{74}$ ,  $w_v = \frac{10}{37}$ ,  $w_d = \frac{6}{37}$ .

d)  $2w_h + 2w_v + 4w_d = 1$ , de modo que  $w_h = \frac{15}{118}$ ,  $w_v = \frac{10}{59}$ ,  $w_d = \frac{6}{59}$ .

La Tabla I resume los pesos para cada uno de los cuatro modelos de vecindad utilizados en la aplicación.

El vector de observaciones y se llenó respetando la estructura general de la matriz de diseño, y se denotó con  $y_{cr}$  para identificar la respuesta de la

$c$ -ésima corrida en  $r$ -ésima réplica, cambiando más rápido por el subíndice derecho. Respetando este mismo orden podemos mostrar como ejemplo la fila 50 de la matriz  $W$ , correspondiente a la cuarta corrida en la tercera réplica, la cual es

$$\left( \mathbf{0}_{1 \times 10} \frac{15}{79} \mathbf{0}_{1 \times 8} \frac{20}{79} \mathbf{0}_{1 \times 3} \mathbf{0}_{1 \times 15} \frac{12}{79} \mathbf{0}_{1 \times 7} \mathbf{0}_{1 \times 8} \frac{12}{79} \mathbf{0}_{1 \times 4} \frac{20}{79} \mathbf{0}_{1 \times 9} \right)$$

Ilustración de la aplicación del test

El ensayo consistió en la evaluación del rendimiento en peso (g/planta) del cultivo de lechuga (*Lactuca*

*sativa*) como consecuencia de tres factores vinculados a la fertilización según el plan de la unidad de producción, sembradas a 30cm entre plantas y 40cm entre hileras. Los factores se etiquetaron con  $x_1$  para la aplicación de la fórmula química (N,P,K) 15:15:15 (niveles: 3,0 y 5,0 g/planta),  $x_2$  para la aplicación de la fórmula química (N,P,K) 12:12:17 (niveles: 3,0 y 5,0 g/planta), y  $x_3$  aplicación de gallinaza (niveles: 200 y 250 g/planta). Los niveles de tratamientos correspondientes al punto central (0,0,0) en variables no codificadas se presentan en la tripleta (4,0 g/planta de 15:15:15; 4,0 g/planta de 12:12:17; y 225 g/planta de gallinaza) y el par (-8,8) en  $x_1$  y  $x_2$  es (2,32 y 5,63 g/planta) y en  $x_3$  es (182,95 y 267,05 g/planta). Todas estas especificaciones rindieron 15 tratamientos diferentes y para un total de 23 puntos de diseño (c), cada uno con tres réplicas, por lo que se obtuvieron 69 observaciones distribuidas aleatoriamente en tres hileras.

Bajo la hipótesis nula de ausencia de solapamiento ( $H_0: \alpha=0$ ), los parámetros estimados del modelo por máxima verosimilitud fueron

$$\hat{\beta}^T = (350,9 \quad 6,2 \quad 7,6 \quad 5,1 \quad -1,3 \quad 0,1 \quad 3,3 \quad 1,9 \quad 0,2 \quad -0,6 \quad 1,0) \text{ y } \hat{\sigma}^2 = 128,3.$$

El score y la inversa de la información esperada asociados al parámetro de solapamiento fueron respectivamente  $s_\alpha \left( 0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2 \right) = 3,55$  y  $F_\alpha^{-1} \left( 0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2 \right) = 0,23$ .

Finalmente, el valor del test de solapamiento en el diseño central compuesto ortogonal y rotatable con tres factores y nueve puntos centrales es  $Ss=2,88$  que comparado con la distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad para un nivel de significación del 5%, rinde una significación evaluada de 0,089 ( $p>0,05$ ), con lo cual se corrobora la hipótesis nula de ausencia de solapamiento; es decir, no existe evidencia estadística para considerar la presencia del efecto del solapamiento entre la unidades vecinas debido a los tratamientos de fertilización y densidad de siembra establecida.

La Tabla II muestra la disposición de las observaciones en el vector de respuesta y el arreglo final de las tres hileras una vez aleatorizados los tratamientos sobre las unidades experimentales.

Discusión de Resultados

Se ha propuesto una prueba estadística para el solapamiento basado en el test score de Rao con el uso

TABLA I  
RESUMEN DE LOS PESOS SEGÚN EL MODELO DE VECINDAD

Modelo de vecindad	Peso horizontal: $w_h$	Peso vertical: $w_v$	Peso diagonal: $w_d$
a: esquinas	15/47	20/47	12/47
b: borde intra-hilera	15/79	20/79	12/79
c: borde inter-hilera	15/74	10/37	6/37
d: ni esquina ni borde	15/118	10/59	6/59

TABLA II  
DISPOSICIÓN DEL DISEÑO EN TRATAMIENTOS Y VARIABLES CODIFICADAS

Tratamiento (g/planta)	orden en el vector y				hilera 1				hilera 2				hilera 3			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	c	$x_1$	$x_2$	$x_3$	(c,r)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	(c,r)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	(c,r)
3,0; 3,0; 200	-1	-1	-1	1	0	-8	0	11,3	-1	1	-1	3,3	1	-1	-1	2,3
4,0; 3,0; 200	1	-1	-1	2	0	0	0	23,1	0	0	0	21,2	0	0	0	20,3
3,0; 4,0; 200	-1	1	-1	3	1	1	-1	4,1	0	0	0	23,2	0	0	0	-8
4,0; 4,0; 200	1	1	-1	4	0	0	0	19,2	0	0	0	18,1	-8	0	0	9,2
3,0; 3,0; 250	-1	-1	1	5	-8	0	0	9,1	1	1	1	8,1	0	0	0	19,1
4,0; 3,0; 250	1	-1	1	6	1	-1	-1	2,2	-1	1	1	7,1	0	0	d	14,2
3,0; 4,0; 250	-1	1	1	7	0	0	0	15,2	-1	-1	-1	1,2	-1	1	-1	3,1
4,0; 4,0; 250	1	1	1	8	-1	-1	1	5,1	0	0	0	15,3	0	0	0	22,2
2,32; 3,5; 225	-8	0	0	9	0	0	0	20,1	-8	0	0	9,3	1	1	-1	4,2
5,63; 3,5; 225	d	0	0	10	1	1	-1	4,3	0	-8	0	11,1	1	1	1	8,3
3,5; 2,32; 225	0	-8	0	11	0	0	d	14,3	0	0	0	16,2	-1	-1	1	5,3
3,5; 5,63; 225	0	d	0	12	0	d	0	12,2	0	d	0	12,3	-1	-1	-1	1,3
3,5; 3,5; 182,95	0	0	-8	13	0	0	0	17,1	1	-1	1	6,3	1	1	1	8,2
3,5; 3,5; 267,05	0	0	d	14	0	0	0	18,2	d	0	0	10,3	0	-8	0	11,2
4,0; 4,0; 225	0	0	0	15	d	0	0	10,1	0	0	-8	13,2	0	0	0	23,3
4,0; 4,0; 225	0	0	0	16	1	-1	1	6,2	0	0	0	21,3	0	0	d	14,1
4,0; 4,0; 225	0	0	0	17	0	0	-8	13,3	0	0	0	17,3	0	0	0	20,2
4,0; 4,0; 225	0	0	0	18	1	-1	-1	2,1	-1	-1	1	5,2	0	0	0	17,2
4,0; 4,0; 225	0	0	0	19	0	0	0	22,3	-1	1	1	7,3	0	0	0	16,1
4,0; 4,0; 225	0	0	0	20	-1	1	1	7,2	0	0	0	19,3	0	0	0	21,1
4,0; 4,0; 225	0	0	0	21	0	0	0	15,1	0	0	0	22,1	d	0	0	10,2
4,0; 4,0; 225	0	0	0	22	0	0	0	16,3	0	0	0	18,3	1	-1	1	6,1
4,0; 4,0; 225	0	0	0	23	-1	1	-1	3,2	0	d	0	12,1	-1	-1	-1	1,1

de operadores de proyección perpendicular. El mismo es fácil de adoptar siempre y cuando la estructura del diseño experimental involucre un modelo como el de Draper y Guttman, utilizando como variables de entrada los diferentes factores de una superficie de respuesta generada por el diseño central compuesto ortogonal y rotatable.

La naturaleza asintótica del test requiere del uso de tamaños de muestras grandes, por tal motivo suele ser bastante útil en el área agronómica y en la producción animal (manejos de pastos y forrajes) pues en dichos contextos suele trabajarse con un número grande de repeticiones de los puntos del diseño o simplemente con suficientes unidades experimentales, lo cual probablemente asegurará el cumplimiento de los supuestos necesario para el análisis. Es importante reconocer la dificultad asociada en la asignación de pesos de la matriz  $W$ . Solo en el ejemplo de aplicación del diseño central compuesto ortogonal y rotatable de tres factores fue necesaria una matriz de dimensión  $69 \times 69$ , la cual no puede sistematizarse fácilmente pues la asignación de los tratamientos es aleatoria y su conformación depende de cada aleatorización.

Finalmente, y aunque el ensayo realizado en campo fue solo para ilustrar la aplicación del test, la detección de ausencia de solapamiento sugiere no solo una aplicación apropiada de los tratamientos sobre las unidades experimentales sino también la ausencia de factores externos que pudieran significativamente dispersar los tratamientos o parte de estos en las unidades más próximas, aunado a una densidad de siembra adecuada. Resulta de interés mencionar la posibilidad de incorporar alguna razón de bloqueo en el modelo, con lo cual se estaría modificando levemente al modelo tal como aparece en Shukla y Subrahmanyam, (1999), con la simple incorporación de una nueva matriz de diseño para el nuevo efecto incorporado, con la posibilidad de obtener algún resultado diferente respecto a la presencia o ausencia del solapamiento. Sin embargo, la ausencia de solapamiento desde el punto de vista del modelo sin razón de bloqueo, tal como se estudió en el presente

estudio, estableció como modelo definitivo al modelo lineal usual, de modo que el proceso de optimización posterior a la regresión pudiera basarse en la superficie del diseño central compuesto y no en la extensión del modelo propuesta por Draper y Guttman.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de Francisco Bonilla, coordinador de la Unidad Académica "La Primavera", adscrita al decanato de extensión de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, Venezuela, por montar, monitorear y registrar los datos de los experimentos de cada uno de los diseños aquí utilizados como ejemplos de aplicación.

#### REFERENCIAS

- Alam MZ, Jamal, P, Nadzir MM (2008) Bioconversion of palm oil mill effluent for citric acid production: statistical optimization of fermentation media and time by central composite design. *World J. Microbiol. Biotechnol.* 24: 1177-1185.
- Bhalli MA, Day AD, Tucker H, Thomson RK, Massey GD (1964) End-border effects in irrigated barley yield trials. *Agron. J.* 56: 346-348.
- Box GEP (1954) The exploration and exploitation of response surfaces: some general consideration and examples. *Biometrics* 10: 16-60.
- Box GEP, Wilson KB (1951) On the experimental attainment of optimum conditions. *J. Roy. Stat. Soc. B.* 13: 1-45.
- Box GEP, Hunter WG, Hunter JS (2005) *Statistics for Experimenters: Design, Innovation, and Discovery*. 2ª ed. Wiley. New York, EEUU. 633 pp.
- Chandra TK, Mukerjee R (1985) Comparison of the likelihood ratio, Wald's and Rao's tests. *Sankhyā A.* 47: 271-284.
- Cliquet S, Durier C, Catroux G (1992) Use of central composite experimental design for the development of *Bradyrhizobium japonicum* liquid inoculants. *Biototechnol. Tech.* 6: 447-482.
- Cochran WG, Cox GM (1957) *Experimental Design*. 2ª ed. Wiley. New York, EEUU. 611 pp.
- Darghan AE (2010) *Test Score de Rao para el Modelo de Solapamiento de Draper y Guttman*. Tesis. Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. 120 pp.
- Darghan AE, Surendra S, Goitia A (2011) Score test para el coeficiente de solapamiento en modelos de superficies de respuesta de primer y segundo orden. *Dyna* 165: 234-245.
- Darghan AE, Surendra S, Monroy J (2014) A Score Test for the agronomical overlap effect in a two-way classification model. *Agron.Col.* 32: 417-422.
- Draper NR, Guttman J (1980) Incorporating overlap effects from neighbouring units into response surface models. *Appl. Stat.* 39: 128-134.
- Graybill FA (1976) *Theory and Application of the Linear Model*. Wadsworth. Pacific Grove. CA, EEUU. 704 pp.
- Hide GA, Read PJ (1990) Effect of neighbouring plants on the yield of potatoes from seed tubers affected with gangrene (*Phoma foveata*) or from plants affected with stem canker (*Rhizoctonia solani*). *Ann. Appl. Biol.* 116: 233-243.
- Khuri AI, Cornell JA (1996) *Response Surfaces: Design and Analysis*. 2ª ed. Dekker. New York, EEUU. 536 pp.
- Li P, Xu G, Li S, Wang Y, Fan T, Zhao Q, Zhang Q (2008) optimizing ultraperformance liquid chromatographic analysis of 10 diterpenoid compounds in *Salvia miltiorrhiza* using central composite design. *J. Agric. Food Chem.* 56: 1164-1171.
- Liu T, Zhang C, Yang G, Wu J, Xie G, Zeng H, Yin C, Liu T (2009) Central composite design-based analysis of specific leaf area and related agronomic factors in cultivars of rapeseed (*Brassica napus* L.). *Field Crops Res.* 111: 92-96.
- Maddala GS, Rao CR, Vinod HD (1993) *Handbook of Statistics. Vol. 11*. North Holland, Amsterdam, Holanda. 800 pp.
- Millan FR, Algarbe MA, Tapia MS (2003) Uso de la metodología de superficie de respuesta y la programación lineal para el desarrollo de un néctar de mora pasteurizado. *Interciencia* 28: 646-650.
- Myers RH, Montgomery DC (2009) *Response Surface Methodology. Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. 3ª ed. Wiley. New York, EEUU. 704 pp.
- Pearce SC (1957) Experimenting with organisms as blocks. *Biometrika* 44: 141-149.
- Rao CR (1948) Large sample tests of statistical hypothesis concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 44: 50-57.
- Shukla GK, Subrahmanyam GSV (1999) A Note on a test and confidence interval for competition and overlap effects. *Biometrics* 55: 273-276.

---

## RAO'S SCORE TEST FOR THE OVERLAPPING COEFFICIENT IN A CENTRAL COMPOSITE DESIGN

Aquiles Darghan Contreras, Surendra Prasad Sinha and Enilsa Madariaga Suarez

### SUMMARY

*An application of the score test of Rao is developed and presented for the overlap coefficient in the Draper and Guttman's model using the response surface generated by the central composite design. The score test of Rao for overlap makes use of the theory associated with the perpendicular projection operators and can be applied with different patterns of neighborhood of a seeding whenever the closest neighbor can be considered as the experimental unit directly affected by the treatments. The illustration for the application of the test was developed in the*

*culture of lettuce sowed to the usual plant density, which was used to define the patterns neighborhood and the associated weight matrix, for which no effect of overlap was found from the statistical point of view. The method is simple to implement and can be applied in the field of agronomy or in similar studies in other areas such as pasture and forage management for animal and veterinary production, as well as in the area of education when different teaching modalities linked to the technologies information and communication are evaluated.*

## Score test DE RAO PARA O COEFICIENTE DE SOLAPAMENTO EM UM DESENHO CENTRAL COMPOSTO

Aquiles Darghan Contreras, Surendra Prasad Sinha e Enilsa Madariaga Suarez

### RESUMO

*Apresenta-se e desenvolve uma aplicação do score test de Rao para o coeficiente de solapamento no modelo de Draper e Guttman utilizando a superfície de resposta gerada pelo desenho central composto. O score test de Rao para solapamento faz uso da teoria associada aos operadores de projeção perpendicular e pode aplicar-se com diferentes padrões de vizinhança de uma plantação sempre e quando se considere ao vizinho mais próximo como a unidade experimental diretamente afetada pelos tratamentos. A ilustração para a aplicação do teste se desenvolveu*

*no cultivo de alface plantada com uma densidade usual, a qual foi utilizada para definir o padrão de vizinhança e a matriz de pesos associada, para o qual não se encontrou o efeito de solapamento desde o ponto de vista estatístico. O método é fácil de implementar e pode aplicar-se no campo da agronomia ou em temas afins com outras áreas, tal como no manejo de pastos e forragens na produção animal e veterinária, assim como na área da educação quando se avaliam as modalidades de ensino vinculadas às tecnologias de informação e comunicação.*