
PROPOSTA DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA A PRODUÇÃO E TESTE DE FUNCIONALIDADE EM AMBIENTE DE MÁQUINAS

Sander Joner e Neida M. Patias Volpi

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático voltado ao sequenciamento e programação da produção em dois estágios com um estoque intermediário que envolve a manufatura industrial. O primeiro estágio consiste num ambiente onde ocorre a produção de itens em várias máquinas paralelas distintas. O segundo é formado por fornos de teste nos quais são simuladas situações climáticas adversas de modo a testar o funcionamento dos itens fabricados. É proposto um modelo matemático para auxílio no processo de gestão das ordens de produção, de modo a determinar em quais máquinas

bem como em que ordem os itens serão produzidos no primeiro estágio, de modo e reduzir custos de produção neste estágio, bem como atender ao melhor aproveitamento possível dos fornos de teste, evitando a operação destes contendo espaços ociosos. Para validação do modelo, propõe-se uma aplicação com dados reais obtidos de uma empresa fabricante de inversores, o qual é o resolvido com uso do software CPLEX e as heurísticas Relax-and-Fix e Fix-and-Optimize. Nos testes realizados a heurística Relax-and-Fix teve um desempenho melhor em cenários onde a quantidade de partições foi maior.

Introdução

Em uma indústria, o planejamento e controle da produção (PCP) tem por finalidade coordenar e administrar os recursos que estão disponíveis e são utilizados durante o processo de produção, tendo como principal objetivo a execução da maneira mais eficiente e eficaz possível do que foi estabelecido para os níveis hierárquicos: estratégico, tático e operacional. O nível estratégico envolve as decisões de longo prazo, definindo os objetivos mais gerais da empresa, sendo as decisões deste nível as que envolvem altos investimentos. O nível tático abrange as decisões de médio prazo e está vinculado com a utilização efetiva de recursos existentes, com o objetivo de cumprir as metas determinadas no planejamento estratégico, definindo como irá acontecer a produção; por exemplo, quais produtos serão produzidos em um determinado

período (dimensionamento de lotes). O nível operacional está relacionado ao dia-a-dia da produção (curto prazo), cujo objetivo é definir as prioridades do nível tático; por exemplo, quais as ordens de produção dos itens e quais as máquinas que serão utilizadas (programação da produção), entre outros, conforme Fleischmann *et al.* (1997).

O pressuposto principal dos modelos teóricos apresentados no decorrer dos últimos anos é tentar cada vez mais representar de forma realística as particularidades dos ambientes produtivos. Um importante modelo de otimização foi proposto por Meyr (2002), quem apresentou um modelo geral voltado ao dimensionamento e sequenciamento de tarefas considerando máquinas paralelas distintas o qual foi chamado de GLSPPL (*General Lot Sizing and Scheduling Problem for Parallel Production Lines*). Este modelo possibilita, além de saber

quando e quanto produzir, decidir onde produzir, ou seja em quais máquinas as tarefas devem ser executadas com objetivo de minimizar custos de estocagem de itens, custo de *setup* dependente da sequência em que os itens são produzidos e custo de produção, porém voltado a somente um estágio produtivo.

Alguns processos industriais são organizados de tal forma que o processo de modelagem ocorre em mais de um estágio produtivo, o que torna os modelos mais complexos de serem formulados (Seeanner e Meyr, 2013). Conforme Ferreira *et al.* (2009) estas decisões são dependentes uma da outra e ambas podem consumir altos níveis de utilização de capacidade de produção. Seeanner e Meyr (2013) apresentam uma revisão de literatura sobre publicações que abordam modelos multi-estágio, citando como referência alguns importantes trabalhos da

área, destacando-se: Grünert (1998), Meyr (2004), Araujo *et al.* (2007), Mohammadi *et al.* (2009), Ferreira *et al.* (2009, 2013) e Toledo *et al.* (2009).

Grünert (1998) apresenta um problema multi-nível com linhas de produção individuais em cada nível, levando em consideração tempos e custos de *setup* e aplicando restrições de balanceamento de estoque para sincronizar as etapas de produção. Meyr (2004) apresenta um modelo baseado em GLSPPL com uma estrutura de tempo comum para todas as linhas de produção em todas as fases de produção. Araújo *et al.* (2007) trabalham com um problema de planejamento de duas fases considerando horizonte rolante bem como custos e tempo de *setup* dependentes da sequência. Em uma das fases diferentes materiais são produzidos e, em outra, transformados em vários produtos. Mohammadi *et al.*

PALAVRAS CHAVE / Ambiente de Máquinas / Dimensionamento de Lotes e Sequenciamento / Estoques Intermediários

Recebido: 24/05/2016. Modificado: 02/12/2016. Aceito: 05/12/2016.

Sander Joner. Graduação em Matemática, Mestre e Doutorando em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, Brasil. Professor, Instituto Federal de

Santa Catarina (IFSC), Brasil. Endereço: Campus Geraldo Werninghaus, IFSC. R. dos Imigrantes, 445 - Rau, Jaraguá do Sul - SC, 89254-430, Bra-

sil. e-mail: sander.joner@ifsc.edu.br

Neida Maria Patias Volpi. Graduação em Matemática, em Engenharia Civil e Doutora em Enge-

nharia Florestal, Universidade Federal do Paraná (UFPR). Mestrado, University of London, RU. Professora Pesquisadora, UFPR, Brasil. e-mail: neida@ufpr.br

PROPOSAL OF A MATHEMATICAL FOR THE PRODUCTION AND PERFORMANCE TEST IN A MACHINE ENVIRONMENT

Sander Joner and Neida M. Patias Volpi

SUMMARY

In this paper we present a mathematical model for the sequencing and scheduling of two-stage production with an intermediate inventory, involving industrial manufacturing. The first stage consists of an environment where the production of items occurs in several different parallel machines. The second one consists of test furnaces in which adverse weather conditions are simulated in order to test the operation of the manufactured items. A mathematical model is proposed to aid in the process management of production orders, so as to determine in which

machines and in what order the items will be produced in the first stage to reduce production costs at this stage, as well as to achieve the best possible use of the test furnaces, avoiding their operation with idle spaces. To validate the model, we propose an application with real data obtained from a manufacturer of inverters, which is solved using CPLEX software, and the Relax-and-Fix and Fix-and-Optimize heuristics. In the tests carried out, the Relax-and-Fix heuristic performed better in scenarios where the number of partitions was larger.

PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA PRODUCCIÓN Y ENSAYO DE FUNCIONALIDAD EN AMBIENTE DE MÁQUINAS

Sander Joner y Neida M. Patias Volpi

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo matemático destinado a la secuenciación y programación de la producción en dos etapas con una acción intermedia que implica la fabricación industrial. La primera etapa consiste en un entorno donde la producción de artículos tiene lugar en varias máquinas paralelas diferentes. La segunda está formada por los hornos de prueba donde se simulan condiciones climáticas adversas con el fin de conocer el funcionamiento de los artículos manufacturados. Se propone un modelo matemático para ayudar en la gestión de procesos de órdenes de producción, a fin de determinar qué

máquinas y en qué orden se producen los artículos en la primera etapa, de modo de reducir los costos de producción en esta etapa, así como lograr el mejor uso posible de la operación de los hornos de pruebas, evitan que contengan espacios vacíos. Para la validación del modelo se propone una aplicación con datos reales obtenidos de un fabricante de inversores, el cual se resuelve con el uso de software CPLEX y las heurísticas Relax-and-Fix y Fix-and-Optimize. En las pruebas de la heurística de Relax-and-Fix tuvo un mejor desempeño en escenarios en los que el número de particiones fue mayor.

(2009) consideram uma produção *flowshop* multi-nível onde todas as máquinas são dispostas em série. Neste modelo eles propõem restrições de sincronização com objetivo de impedir a produção de um item em uma determinada máquina, a menos que tenha sido concluído na máquina antecessora. Ferreira *et al.* (2009) propõe uma aplicação na produção de refrigerantes em uma fábrica de pequeno porte considerando dois estágios interdependentes: xaroparia e envase. Toledo *et al.* (2009) resolveu um modelo de planejamento da produção em dois estágios aplicado a um problema de produção de bebidas através da aplicação de algoritmo genético multi-populacional. O modelo considera máquinas paralelas com *setup* dependente da sequência e custos com *backorder*. Ferreira *et al.* (2013) propõem

formulações matemáticas monoestágio voltadas à resolução deste mesmo problema com objetivo de reduzir suas dimensões e consequentemente o esforço computacional para a resolução.

Neste trabalho propõe-se um modelo de otimização que difere dos encontrados na literatura principalmente pelo fato de se trabalhar com estoques intermediários limitados bem como por considerar um problema com períodos divididos em subperíodos com demanda não estabelecida para cada período, mas sim para todo o horizonte de planejamento. O principal objetivo é apresentar um modelo matemático de dimensionamento e sequenciamento de lotes num ambiente produtivo com máquinas distintas em paralelo em um setor de uma indústria que sincronize dois estágios do planejamento ope-

racional, a saber: produção e teste de funcionalidade, com estoque intermediário.

Descrição do Problema

O presente trabalho busca contribuir com a pesquisa de problemas que envolvem produção, estoque intermediário e teste de funcionalidade para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com máquinas em paralelo composto por um estágio voltado à fabricação dos itens e outro ao teste de funcionamento dos itens fabricados no estágio anterior, onde entre esses estágios há possibilidade de se manter um estoque intermediário de itens, o qual possui limitação de capacidade e custos de armazenamento. É importante fazer um sincronismo na linha de produção durante o planejamento de produção, para evitar excessos de

estoques e paradas de máquinas, reduzindo assim custos desnecessários. Quanto ao teste de funcionamento dos itens que são enviados a ambientes próprios, é importante utilizá-los ao máximo possível, pois espaços ociosos também acabam gerando custos.

Descrição dos estágios de produção

Cada item a ser produzido é submetido a dois estágios. O primeiro estágio é formado por máquinas paralelas, onde ocorre a montagem do produto. Este estágio consiste em saber o quanto, em qual máquina e sequência os itens deverão ser produzidos de modo a atender às necessidades do segundo estágio, pois a produção de diferentes itens em uma mesma máquina implica em custos de preparação da máquina, denominado de

custo de *setup*. Após a produção dos itens no primeiro estágio, estes são enviados para um estoque intermediário com capacidade limitada de armazenamento, de modo a aguardar a produção de um número suficiente de itens para compor um lote, para então serem enviados ao segundo estágio. Esse estágio consiste num setor de teste de funcionamento dos itens, que é composto por fornos de teste que operam a uma temperatura elevada e simula o funcionamento dos itens produzidos em condições extremas que contam com conectores (*slots*) apropriados a cada tipo de item que deve ser testado. Cada item submetido a um forno de teste deve ficar ali acondicionado por um tempo fixo determinado, onde durante esse tempo o item permanece em operação, simulando seu real funcionamento em condições de temperatura e umidade ajustadas de acordo com as especificidades de cada tipo de item. A necessidade do teste em fornos se justifica pelo fato de que alguns tipos de itens são componentes de máquinas que operam em condições severas de temperatura e umidade e por isso deverão também ser testados nessas mesmas condições.

Descrição do problema proposto

É importante salientar que o segundo estágio (forno de teste) é dependente da saída de itens do primeiro estágio. Sendo assim, um dos problemas encontrados é organizar as quantidades bem como o sequenciamento da produção nas máquinas paralelas que compõe o primeiro estágio, para que as saídas de itens estejam programadas de forma que ao mesmo tempo seja minimizada a geração de estoque intermediário de itens não testados evitando filas de itens, para que se evite a operação de um forno de teste com espaços ociosos. Ainda no primeiro estágio, quando uma máquina passa a ter que produzir um novo tipo de item, o processo de funcionamento

precisa ser interrompido para que esta seja configurada (*setup*). Esse tempo de *setup* neste problema é dependente da sequência em que os itens são produzidos, onde o tempo para troca de um item *i* para um item *j* pode ser diferente do tempo troca do mesmo item *j* para o item *i*.

Observa-se que nem sempre é possível ou viável produzir uma quantidade que possa suprir a capacidade do forno de teste em um determinado período. Sendo assim, na formulação do modelo matemático foi aplicada uma penalidade relacionada com o custo de operação de um espaço vazio em cada forno de teste, cujo valor varia conforme as especificações técnicas de cada um desses fornos. Devido à busca pela minimização de custos, torna-se necessário sempre que possível, utilizar ao máximo a capacidade dos fornos, buscando atender às demandas previstas para o horizonte de planejamento.

Modelo Matemático

O modelo matemático para o problema em estudo foi formulado a partir das ideias propostas no GLSPPL de Meyr (2002), cujo horizonte de planejamento é formado por *T* períodos, e cada um dos períodos *t* é dividido em subperíodos *s*. O conjunto de todos os subperíodos *s*, que compõe o horizonte de planejamento é representado por *W*.

Para resolver a problemática apresentada, foram criadas novas restrições ao GLSPPL de modo a minimizar o estoque intermediário existente entre a saída das máquinas paralelas e a entrada dos itens nos fornos de teste, e ainda para maximizar a carga de cada forno de teste. Cada um dos períodos foi dividido em subperíodos, tornando-se possível a produção de mais de um tipo de item em cada máquina em um mesmo período, desde que haja capacidade (tempo) disponível.

A seguir é desenvolvido o modelo matemático do problema proposto.

Parâmetros:
N: quantidade de itens;
M: quantidade de máquinas;
T: quantidade de períodos no horizonte de planejamento;
W: quantidade de subperíodos;
F: quantidade de células de teste (fornos).

Índices:
i: item ($i = 1, \dots, N$);
l: máquina ($l = 1, \dots, M$);
t: período de produção ($t = 1, \dots, T$);
s: subperíodo ($s = 1, \dots, W$);
f: células de teste ou fornos ($f = 1, \dots, F$).

Dados:
D_i : demanda do item <i>i</i> no final do horizonte de planejamento;
l_{min_i} : lote mínimo do item <i>i</i> produzido na máquina <i>l</i> ;
st_{ji} : tempo de <i>setup</i> para a produção do item <i>j</i> imediatamente após o item <i>i</i> na máquina <i>l</i> ;
CP_{li} : capacidade de produção disponível da máquina <i>l</i> no período <i>t</i> ;
p_{li} : tempo de produção de uma unidade do item <i>i</i> na máquina <i>l</i> ;
cs_{jli} : custo de <i>setup</i> para produzir o item <i>j</i> imediatamente após o item <i>i</i> na máquina <i>l</i> ;
cp_{li} : custo de produção do item <i>i</i> na máquina <i>l</i> ;
h_i : custo de manutenção de uma unidade do item <i>i</i> não testado em estoque por período;
cf_{if} : custo fixo da utilização do forno <i>f</i> ;
cf_{man_f} : custo de manutenção do forno <i>f</i> para a realização do teste de carga;
SP_i : conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina <i>l</i> ;
W_t : conjunto dos subperíodos contidos no período <i>t</i> ;
CCT_f : ocupação máxima em área do forno <i>f</i> ;
a_i : área ocupada pelo item <i>i</i> no forno <i>f</i> ;
CAT: capacidade de armazenamento de itens testados para todo o horizonte de planejamento;

Datos (continuação)
$CANT_t$: capacidade de armazenamento de itens não testados para cada período <i>t</i> ;
I_{i0} : quantidade de item <i>i</i> não testado no estoque intermediário, no início do horizonte de planejamento;
x_{i0l} : 1, se a máquina está preparada para produzir o item <i>i</i> na máquina <i>l</i> no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário.

Variáveis de Decisão:
q_{isl} : quantidade do item <i>i</i> produzido no subperíodo <i>s</i> na máquina <i>l</i> ;
I_{it} : quantidade do item <i>i</i> não testado em estoque no final do período <i>t</i> ;
qc_{it} : quantidade do item <i>i</i> que será enviado à célula teste dedicada a este item, no período <i>t</i> ;
z_{ft} : igual a 1, se o forno <i>f</i> está sendo utilizado no período <i>t</i> ; e 0, caso contrário;
w_{ft} : é igual a 1, se o forno foi preparado pela primeira vez com custo para o teste de carga; e 0, caso contrário;
qcf_{if} : quantidade do item <i>i</i> que será enviado ao forno <i>f</i> no período <i>t</i> ;
x_{isl} : igual a 1, se a máquina <i>l</i> está preparada para produzir o item <i>i</i> no subperíodo <i>s</i> ; e 0, caso contrário;
y_{ijsl} : igual a 1, se há <i>setup</i> do item <i>i</i> para o item <i>j</i> na máquina <i>l</i> no subperíodo <i>s</i> ; e 0, caso contrário;

As condições iniciais são representadas por:

I_{i0} : quantidade de item *i* não testado no estoque intermediário, no período inicial;

x_{i0l} : tem valor 1, se a máquina *l* está preparada para produzir o item *i* na máquina *l* no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário.

Nas Eqs. 1 à 17 é apresentada o modelo matemático para o problema em estudo.

A função objetivo (1) representa a minimização dos custos variáveis com *setup*, produção, armazenagem e custos de manutenção e de utilização do forno.

$$\min \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_s} CS_{ijl} \cdot y_{ijsl} + \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_l} cp_{il} \cdot q_{isl} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_i \cdot l_{it} + \sum_{f=1}^F \sum_{t=1}^T (cfman_f \cdot z_{ft} + cfixo \cdot w_{ft}) \quad (1)$$

A restrição (2) garante que a quantidade de horas consumidas na produção, adicionada da quantidade de horas necessárias para preparação da máquina, seja menor ou igual à capacidade disponível em cada máquina em cada período de tempo.

$$\sum_{s \in W_t} \sum_{i \in SP_s} p_{il} \cdot q_{isl} + \sum_{s \in W_t} \sum_{i \in SP_s} \sum_{j \in SP_t} st_{ijl} \cdot y_{ijsl} \leq CP_{it} \quad (2)$$

$l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T$

A restrição (3) indica que somente haverá produção do item i no subperíodo s se a máquina estiver preparada para o item ($x_{isl} = 1$).

$$p_{il} \cdot q_{isl} \leq CP_{it} \cdot X_{isl}$$

$l = 1, \dots, M; i \in SP_l; (3)$
 $t = 1, \dots, T; s \in SP_t$

A restrição (4) impõe uma condição de lote mínimo de produção para cada tipo de item em um subperíodo e que somente é ativada, quando ocorre a preparação de máquina para um novo item.

$$q_{isl} \geq l \cdot \min_{i,l} (x_{isl} - x_{i,s-1,l})$$

$l = 1, \dots, M; i \in SP_l; s \in W_l \quad (4)$

A restrição (5) determina que a máquina esteja preparada para produzir somente um item por máquina em cada subperíodo s .

$$\sum_{i \in SP_s} x_{isl} = 1 \quad l = 1, \dots, M; s \in W_l \quad (5)$$

A restrição (6) indica se houve mudança de produção do item i para o item j na máquina l entre os subperíodos.

$$y_{ijsl} \geq x_{i,s-1,l} + x_{jsl} - 1$$

$l = 1, \dots, M; i, j \in SP_l; (6)$
 $s = 1, \dots, W$

A restrição (7) realiza o balanço de estoques, relacionando quantidades produzidas, estoque intermediário de itens a serem testados com quantidade enviada para cada célula teste para cada item por período em todo o horizonte de planejamento.

$$l_{i,t-1} + \sum_{l=1}^M \sum_{s \in W_t} q_{isl} - l_{it} = qc_{it}$$

$t = 1, \dots, T \quad i \in SP_l \quad (7)$

A restrição (8) indica que a quantidade de itens enviados para a célula de teste deve ser no máximo a quantidade em estoque do item no período anterior.

$$qc_{it} \leq l_{i,t-1}$$

$i = 1, \dots, N; (8)$
 $t = 1, \dots, T$

A restrição (9) garante que a quantidade de itens não testados, que compõem o estoque intermediário, não exceda a capacidade de armazenamento de itens não testados após retirados os itens enviados aos fornos.

$$\sum_{i=1}^N l_{it} \leq CANT_t \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

A restrição (10) determina que a quantidade do item i que será enviado a célula de teste no período t seja igual ao conjunto de todos os itens que serão enviados ao forno f no período t .

$$qc_{it} = \sum_{f=1}^F qc_{itf}$$

$i = 1, \dots, N; (10)$
 $t = 1, \dots, T$

A restrição (11) indica que a quantidade máxima do item i que será enviado ao forno f no

período t seja no máximo a ocupação em área do forno f .

$$\sum_{i=1}^N a_i \cdot qc_{itf} \leq CCT_f \cdot z_{ft}$$

$t = 1, \dots, T; (11)$
 $f = 1, \dots, F;$

A restrição (12) indica se o forno foi preparado pela primeira vez com custo durante o período t .

$$w_{ft} \geq z_{ft} - z_{f,t-1}$$

$f = 1, \dots, F; (12)$
 $t = 1, \dots, T$

A restrição (13) garante que a quantidade de itens testados nas células de teste durante o horizonte de planejamento não ultrapasse a capacidade máxima de armazenamento de itens testados.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N qc_{it} \leq CAT \quad (13)$$

A restrição (14) determina que a quantidade total do item i que será enviada à célula de teste dedicada a este item em todos os períodos, deve ser pelo menos igual à demanda do item i estabelecida para o horizonte de planejamento.

$$\sum_{t=1}^T qc_{it} \geq D_i \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

A restrição (15) indica que as máquinas não estão preparadas para nenhum item no início do horizonte de planejamento T .

$$x_{i0l} = 0$$

$l = 1, \dots, M; i \in SP_l \quad (15)$

A restrição (16) indica que as variáveis x_{isl} e z_{ft} são binárias.

$$x_{isl}, z_{ft}, w_{ft} \in \{0,1\}$$

$l = 1, \dots, M; i \in SP_l; (16)$
 $s = 1, \dots, W; f = 1, \dots, F;$
 $t = 1, \dots, T$

A restrição (17) indica que as variáveis q_{isl} , qc_{it} , qc_{itf} e

l_{it} são inteiras não negativas e que as variáveis y_{ijsl} são reais não negativas, pois pela formulação do modelo, não há necessidade de definir as variáveis y_{ijsl} como inteiras, pois estas são obtidas da combinação de variáveis binárias.

$$q_{isl}, qc_{it}, l_{it} \in Z^+; y_{ijsl} \geq 0$$

$l = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N; (17)$
 $t = 1, \dots, T; s = 1, \dots, W;$

Implementação e Aplicação do Modelo Proposto

Para efeito de funcionamento do modelo matemático proposto é apresentado um cenário para um problema de pequeno porte chamado de P1. Neste caso é possível aplicar uma metodologia exata. Já para problemas de grande porte, uma metodologia aproximada será proposta utilizando as heurísticas *Relax-and-Fix* (RF) e *Fix-and-Optimize* (FO).

A demanda considerada alta para cinco itens, utiliza ~90% da capacidade de produção instalada. Considera-se oito períodos divididos em subperíodos. O número de subperíodos foi considerado igual ao número de itens para permitir que qualquer item possa ser produzido em qualquer um deles. Em relação aos custos, a empresa apenas forneceu os valores limitantes. Os cinco itens são de diferentes dimensões com área projetada conhecida. Estas informações são necessárias pois a ocupação do forno é calculada através da restrição (11) do modelo matemático. Os dados utilizados para a aplicação do modelo proposto estão disponíveis em Joner (2016).

O problema P1 foi executado em um computador com processador Intel Core i5 de 1.7GHz e 8Gb de memória RAM, bem como o pacote computacional IBM ILOG CPLEX (Optimization Studio) 12.6. O tempo de execução foi ~1h e 45min para obter a solução ótima.

A Figura 1 mostra a representação gráfica dos resultados. Observa-se o sequenciamento

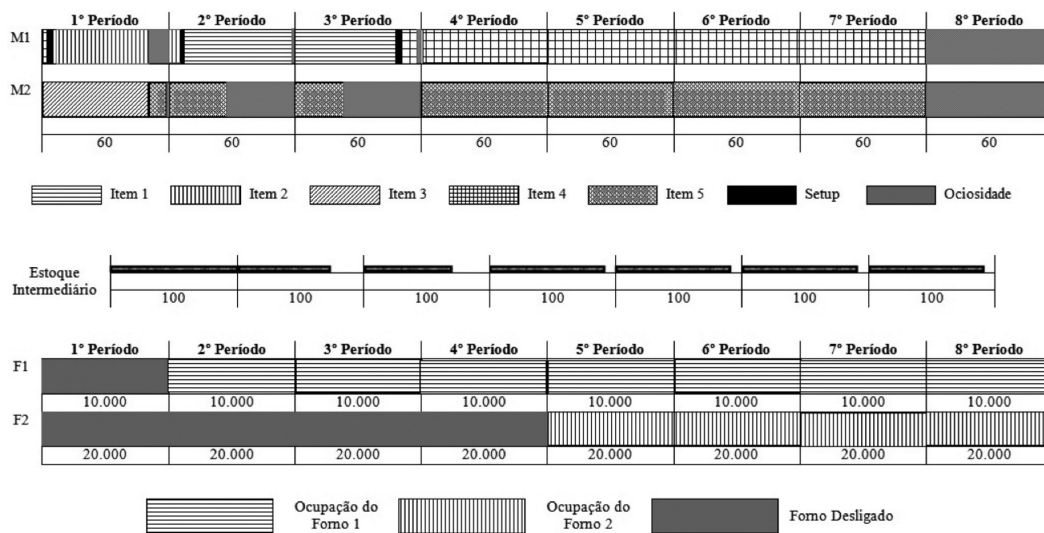


Figura 1. Representação gráfica do problema P1.

dos itens nas máquinas M1 e M2, os *setups* ocorridos nos 1º, 2º e 3º períodos na máquina M1 e no 1º período da máquina M2. O forno F1 teve sua ocupação máxima a partir do 2º período e o forno F2 a partir do 5º período. A capacidade de produção da máquina M1 está quase no limite. Os fornos quando utilizados estão na sua capacidade máxima, e quando não são utilizados estão desligados. A máquina M2 tem ociosidade nos 2º e 3º períodos, porém não é possível antecipar a produção do item 5 do 3º para o 2º período devido a capacidade do forno F1 no 2º período já ter atingido o seu máximo de ocupação. O fluxo do estoque intermediário com capacidade de 100 unidades está bem controlado, conforme mostra a Figura 2.

Para obter a solução do modelo proposto em situações de grande porte foram utilizadas

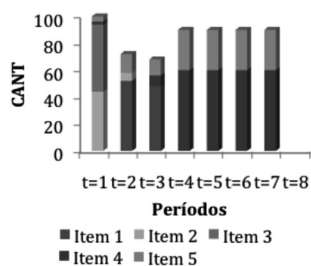


Figura 2. Fluxo do estoque intermediário do problema P1. Cant: quantidade itens não testados no estoque intermediário.

as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*, que se baseiam na decomposição das variáveis inteiras do problema original em subconjuntos disjuntos. Essas heurísticas foram escolhidas devido ao seu desempenho na resolução de diversos problemas práticos de dimensionamento e sequenciamento de lotes similares ao tratado nesse trabalho, como citado em Beraldi *et al.* (2008), Ferreira *et al.* (2009) e Ulbricht (2015).

Neste trabalho foram utilizadas as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* com três tipos de partições, conforme em Furlan (2011). Para este processo de relaxação foram escolhidas as variáveis x_{ist} que são binárias e consistiu-se em torná-las reais no intervalo $[0,1]$. As partições consideradas foram: por períodos (RF-P), por máquinas (RF-M) e por itens (RF-I) na heurística *Relax-and-Fix*. A heurística *Fix-and-Optimize* é um método de melhoria, que necessita de uma solução inicial factível, que neste trabalho foi considerado a solução da heurística *Relax-and-Fix*. Para esta heurística também foram aplicadas as partições de variáveis em relação aos períodos (FO-P), às máquinas (FO-M) e aos itens (FO-I).

Para a realização dos experimentos foram propostos quatro problemas (P1, P2, P3 e P4) de

tamanhos diferentes afim de gerar as instâncias de teste. Os problemas envolvem de 5 a 20 itens, 2 a 3 máquinas e 2 a 3 fornos. A capacidade de processamento em cada máquina foi fixada em 480min, distribuídos em oito períodos, o que equivale a um dia de trabalho de 8h. O problema P1 já foi resolvido pela metodologia exata e sua solução está representada na Figura 1. Os problemas P2 e P3 correspondem a mesma situação do problema P1, porém com o aumento de número de itens e demanda total em torno de 90% da capacidade instalada. No problema P4 o número de itens aumentou para 20, e para manter a mesma proporção de utilização da capacidade instalada foi necessário acrescentar uma máquina. Estes novos testes foram executados no mesmo computador conforme já citado.

Para a análise da eficiência das heurísticas adotou-se como critério de parada o tempo de execução de 1h e o cálculo do (GAP) relativo, onde o GAP é calculado pela expressão (18), em que $f(x)$ e ML representam o valor da função objetivo obtido pela heurística e do melhor limitante inferior encontrado pelo CPLEX, respectivamente:

$$GAP = \left(\frac{f(x) - ML}{f(x)} \right) \times 100\% \quad (18)$$

A Tabela I mostra as soluções (valor da função objetivo, o GAP e o tempo) dos quatro problemas, obtidas pelo CPLEX puro e pelas diferentes estratégias de partições das heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*. Para o problema P1, observa-se que os valores da função objetivo das heurísticas estão bem próximo do valor da função objetivo do CPLEX, o que demonstra confiabilidade no método e um ganho computacional enorme de tempo em relação ao mesmo. No problema P2 é possível observar que houve um ganho com a aplicação das heurísticas em relação ao CPLEX, porém, não houve uma grande melhora da heurística *Fix-and-Optimize* em relação à *Relax-and-Fix*. Para o problema P3 observa-se que as heurísticas apresentam um GAP menor em relação ao GAP do CPLEX, exceto as heurísticas RF-P e FO-P. No cenário P4 houve um ganho computacional para as heurísticas RF-I e FO-I em relação ao CPLEX e observa-se que as heurísticas apresentam um GAP menor em relação ao GAP do CPLEX, exceto a heurística RF-M.

Conclusões

O modelo matemático proposto para o problema em estudo mostrou-se eficaz através dos testes realizados, pois observou-se um controle de produção nas máquinas, não deixando-as ociosas, e ao mesmo tempo um controle nos estoques intermediários afim de não gerar filas para o teste de funcionalidade. É importante observar que tanto o estoque intermediário não ficou no seu limite como os fornos não ficaram subutilizados. Foram apresentados testes computacionais utilizando-se as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*, pois a medida que aumenta-se o número de itens, máquinas e fornos, o modelo não consegue ser resolvido de forma exata.

O desempenho da heurística *Relax-and-Fix* depende da dimensão dos subproblemas, do tempo de busca em cada um,

TABELA I
RESULTADOS DOS PROBLEMAS GERADOS ATRAVÉS DAS HEURÍSTICAS

Cenários	Análise	CPLEX	RF-P	RF-M	RF-I	FO-P	FO-M	FO-I	
P1	5 itens	FO	161,697	161,798	161,697	161,725	161,786	161,697	161,725
	2 máquinas	GAP	0%	0,06%	0%	0,02%	0,06%	0%	0,02%
	2 fornos	Tempo (seg.)	6,591	5	39	4	5	48	4
P2	10 itens	FO	69,270	68,431	68,222	68,211	68,254	68,222	68,211
	2 máquinas	GAP	27,37%	26,48%	26,25%	26,24%	26,29%	26,25%	26,24%
	2 fornos	Tempo (seg.)	3,600	720	3,600	3,600	1,384	3,600	886
P3	15 itens	FO	36,543	38,565	36,412	36,020	38,389	36,401	36,008
	2 máquinas	GAP	18,18%	22,47%	17,88%	16,99%	22,11%	17,86%	16,96%
	2 fornos	Tempo (seg.)	3,600	3,600	3,600	3,600	3,600	3,600	3,600
P4	20 itens	FO	36,376	18,528	53,025	20,497	18,528	22,694	20,497
	3 máquinas	GAP	48,11%	0,93%	65,38%	10,45%	3,75%	19,12%	10,45%
	3 fornos	Tempo (seg.)	3,600	3,600	3,600	360	3,600	3,600	360

FO: função objetivo, RF: heurística *Relax-and-Fix*, FO: heurística *Fix-and-Optimize*, P, M, I: períodos, máquinas e itens.

como também da solução inicial no primeiro subproblema. Em relação aos problemas testados, como o número de itens é maior que o número de períodos e máquinas implica que a quantidade de subproblemas a serem resolvidos no RF-I é bem maior que no RF-P e RF-M, o que tende a gerar resultados com mais rapidez. Isso justifica alguns bons resultados dessa técnica tal como em P3 e P4. Os resultados obtidos pelo RF-M foram em geral de pior qualidade, pois cada subproblema relativo a dois ou três máquinas tem uma dimensão quase parecida com o do problema resolvido no CPLEX. Dependendo da solução inicial no primeiro subproblema do RF-M pode-se inclusive chegar a uma solução de pior qualidade em igual tempo de execução que o obtido pelo CPLEX como aconteceu no P4.

A técnica *Fix-and-Optimize* não contribuiu em melhorias nos testes realizados, apesar de ter-se dado mais 1h para tal fim, com exceção no P4, onde houve um ganho considerável. Justifica-se esse mau desempenho devido ao fato de que a heurística *Fix-and-Optimize* considera uma solução conhecida e fixa um conjunto de

variáveis de n-1 partições que pode não gerou melhoria nas variáveis da partição a ser otimizada.

Considerando todas essas observações conclui-se que em função do tempo computacional gasto a heurística *Fix-and-Optimize* não teve um bom desempenho como técnica de melhoria. A heurística *Relax-and-Fix* mostrou-se mais adequada e, em função dos testes realizados, a melhor partição a ser utilizada tem a ver com a maior quantidade de subproblemas a serem resolvidos, como na partição RF-I.

A principal contribuição desse trabalho foi a proposta do modelo matemático para problemas de programação e sequenciamento da produção com estoques intermediários entre a produção do item e seu teste de funcionalidade. A vantagem é que esse modelo pode ser aplicado a qualquer setor de uma indústria devido a sua própria formulação.

REFERÊNCIAS

Araujo S, Arenales M, Clark A (2007) Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *J. Heurist.* 13: 337-358.

Ferreira D, Morabito R, Rangel S (2009) Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *Eur. J. Oper. Res.* 196: 697-706.

Ferreira D, Almada-Lobo BR, Rangel S (2013) Formulações monoestágio para o problema da produção de bebidas dois estágios com sincronia. *Produção* 23: 107-119.

Fleischmann B, Meyr H (1997) The general lot sizing and scheduling problem. *Oper. Res. Spektr.* 19: 11-21.

Furlan MF (2011) *Métodos Heurísticos para o Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio com Limitação de Capacidade*. Tese. Universidade de São Paulo, Brasil. pp. 66-70.

Grünert T (1998) *Multi-Level Sequence-Dependent Dynamic Lot Sizing and Scheduling*. Shaker. Aachen, Alemanha. pp. 50-68.

Joner S (2016) Um modelo matemático aplicado ao dimensionamento e sequenciamento de lotes em máquinas distintas em paralelo com estoques intermediários limitados. *Anais I Simp. de Métodos Numéricos em Engenharia* (SMNE). Curitiba. Brasil. pp. 350-357.

Kawamura SM (2009) Aplicação da heurística *Relax-and-Fix* no problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em máquinas distintas em paralelo. *Anais XLII Simp. Brasileiro de Pesquisa Ope-*

racional (SBPO). Bento Gonçalves, Brasil. pp. 80-88.

Mercé C, Fontam G (2003) Mip-based heuristics for capacitated lotsizing problems. *Int. J. Prod. Econ.* 85: 97-111.

Meyr H (2002) Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines. *Eur. J. Oper. Res.* 139: 277-292.

Meyr H (2004) Simultane Losgrößen- und Reihenfolgeplanung bei mehrstufiger kontinuierlicher Fertigung. *Zeitsch. Betriebswirtsch.* 74: 585-610.

Mohammadi M, Fatemi Ghomi SMT, Karimi B, Torabi SA (2009) Development of heuristics for multiproduct multi-level capacitated lotsizing problem with sequence-dependent setups. *J. Appl. Sci.* 9: 296-303.

Moraes LCC, Santos MO (2012) Heurísticas Relax-and-fix para o problema de dimensionamento de lotes com janelas de tempo de execução. *Anais Congr. Latino-Iberoam. de Investigación Operativa*. Rio de Janeiro, Brasil. pp. 44-53.

Seannner F, Meyer H (2013) Multi-stage simultaneous lot-sizing and scheduling for flow line production. *Oper. Res. Spektr.* 35: 33-73.

Toledo C, França P, Morabito R, Kimms A (2009) Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *Int. J. Prod. Res.* 47: 3097-3119.